

# ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEgeben VON

K. FEDERHOFER-GRAZ · P. FUNK-WIEN · W. GAUSTER-WIEN  
K. GIRKMANN-WIEN · F. HOPFNER-WIEN · F. JUNG-WIEN  
F. MAGYAR-WIEN · E. MELAN-WIEN · K. WOLF-WIEN

SCHRIFTLEITUNG

F. MAGYAR-WIEN und K. WOLF-WIEN

BAND II, HEFT 5 (SCHLUSSHEFT)

MIT 20 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN AM 6. SEPTEMBER 1948)



WIEN  
SPRINGER-VERLAG  
1948

Das

## Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwangsläufig nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20 — 25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag)

Wien I, Mölkerbastei 5

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörlicher oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten 75 Sonderdrucke ihrer Beiträge kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

## Band II, Heft 5

## Inhaltsverzeichnis

### Originalarbeiten.

Seite

K. Federhofer, Berechnung der Grundschwingzahl der gleichmäßig belasteten dünnen Kreisplatte mit großer Ausbiegung .....	325
F. Müller-Magyari, Kritische Spannungen dünnwandiger Plattenwerke unter zentrischem Druck. (Mit 7 Textabbildungen.) .....	331
H. Schuh, Einige Probleme der Strömung, des Wärmeüberganges und der Diffusion bei Laminarströmung längs einer ebenen Platte. (Mit 7 Textabbildungen.) .....	346
H. Borowicka, Die Druckausbreitung in einer Halbscheibe bei mit der Tiefe abnehmendem Elastizitätsmodul. (Mit 2 Textabbildungen.) .....	360
K. M. Koch, Ein neues Bild des metallischen Leitungsmechanismus. (Mit 2 Textabbildungen.)	363
H. Parkus, Die Torsion geschlitzter Hohlwellen. (Mit 2 Textabbildungen.) .....	372
Buchbesprechungen .....	376
Kohlausch K. W. F., Ausgewählte Kapitel aus der Physik, III. Teil (F. Magyar). —	
Kohlausch K. W. F., Ausgewählte Kapitel aus der Physik, IV. Teil (F. Magyar). —	
König H. W., Laufzeittheorie der Elektronenröhren. I. und II. Teil (F. Kraemar). —	
Motzko L., Kälte und Wärme in Erde und Luft (H. Melan).	

## Berechnung der Grundschwingzahl der gleichmäßig belasteten dünnen Kreisplatte mit großer Ausbiegung.

Von K. Federhofer, Graz.

### I. Einleitung.

Eine am Rande eingespannte dünne Kreisplatte werde durch gleichförmigen Druck  $p$  stark durchgebogen, so daß der Biegungspfeil vergleichbar mit der Plattendicke oder sogar noch erheblich größer als diese werde. Dann erfährt die Mittelfläche der Platte im Gegensatz zur schwach gebogenen Platte eine Reckung, deren Einfluß auf das elastische Verhalten solcher stark gebogener Kreisplatten in einer früheren Arbeit des Verfassers<sup>1</sup> klargestellt worden ist. Wird nun eine solche gleichförmig belastete Kreisplatte in ihrer gekrümmten Gleichgewichtslage zu kleinen Schwingungen angeregt, so beeinflußt die in der Mittelfläche schon vorhandene Dehnung die Frequenzen dieser Eigenschwingungen; eine solche Platte besitzt höhere Steifigkeit als eine nur schwach gebogene Platte, so daß die Eigenfrequenzen mit Zunahme der Dehnung, d. h. mit Zunahme des auf die Platte wirkenden Druckes anwachsen. Die Feststellung dieser Abhängigkeit ist Gegenstand dieser Mitteilung.

Die Untersuchung beschränkt sich auf die praktisch besonders wichtige Grundschiwingung, der jedenfalls eine zentrisch-symmetrische Schwingungsform zugehört.

Das bereits erledigte statische Problem<sup>2</sup> der Kreisplatte mit großer Ausbiegung erfordert die Lösung zweier simultaner, nicht linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die in strenger Form nur durch Reihenentwicklungen möglich ist, wobei die Koeffizientenberechnung sehr umfangreiche Zahlenrechnungen verlangt. Somit kann die genaue Meridianform der stark ausgebogenen Platte, um die sie kleine Schwingungen ausführt, nicht durch einen geschlossenen Ausdruck festgelegt werden. Die Lösung dieses Schwingungsproblems ist daher nur genähert möglich.

Man kann sich bei dieser Sachlage nach dem Vorgang von S. Timoshenko<sup>3</sup> z. B. so behelfen, daß man für die gekrümmte Gleichgewichtslage der schwingenden Platte die aus der Kirchhoffschen linearen Biegungstheorie bekannte einfache Gleichung der schwach gebogenen Mittelfläche wählt, sodann zwecks Berechnung der Dehnungen der Mittelfläche für die radiale Verschiebung ihrer Punkte in erster Näherung einen einfachen, die Randbedingungen befriedigenden Potenzansatz annimmt und hiermit schließlich die Grundschiwingzahl nach dem Energieverfahren berechnet.

Für Kreisplatten, deren Biegungspfeil kleiner oder höchstens gleich der Plattendicke ist, wird durch dieses Verfahren der Einfluß der Reckung der Mittelfläche auf die Grundfrequenz genügend genau wiedergegeben. Für Platten mit einem die Dicke um ein Mehrfaches übersteigenden Biegungspfeil muß aber bei der Festlegung der Gleichgewichtsform der ausgebogenen Platte der Einfluß der Dehnung ihrer Mittel-

<sup>1</sup> K. Federhofer: Luftfahrt-Forsch. **21**, 1 (1944).

<sup>2</sup> St. Way: Trans. Amer. Soc. mechan. Engr. **56**, 627 (1934) und Fußnote 1.

<sup>3</sup> S. Timoshenko: Schwingungsprobleme der Technik, S. 344. Berlin. 1934.

fläche, der bei der linearen Kirchhoffschen Theorie unbeachtet bleibt, berücksichtigt werden.

Die Platte nähert sich dann stark dem Verhalten einer Membrane, es bildet sich ein ziemlich schmaler Randring mit scharfer Krümmung aus, während im übrigen Plattenteil nahezu konstante Krümmung besteht. Man kann diesem Umstände durch einen von A. Nádai<sup>4</sup> benutzten Potenzansatz Rechnung tragen, mit dem unter Verwendung des Galerkinschen Verfahrens die Meridianlinie der ausgebogenen Plattenform geschlossen darstellbar wird. Dieses Verfahren führt — wie in meiner früheren Arbeit<sup>5</sup> gezeigt wurde — zu sehr guter Annäherung an die durch strenge Integration der nichtlinearen Grundgleichungen mit Hilfe von Reihen ermittelten Meridianform der stark ausgebogenen Kreisplatte. Dieses Verfahren wird auch im folgenden verwendet und es sollen zunächst jene Gleichungen obiger Arbeit, die für die vorliegende Untersuchung in Betracht kommen, zusammengestellt werden.

## 2. Meridianform der stark ausgebogenen Platte und ihre Membranspannungen.

Bezeichnet  $w(r)$  die Durchbiegung der Platte an der Stelle  $r$ , so läßt sich die Meridianform der stark ausgebogenen Kreisplatte genähert darstellen durch

$$\frac{w(\varrho)}{w_0} = 1 + \frac{2(n+1)}{1-n} \left( \frac{\varrho^2}{2} - \frac{\varrho^{n+1}}{n+1} \right). \quad (1)$$

Hierin bedeutet mit  $a$  als Plattenhalbmesser  $\varrho = \frac{r}{a}$ ,  $w_0$  den Biegungspfeil in Plattenmitte ( $\varrho = 0$ ),  $n$  eine ganze Zahl größer als 3, die nach Gl. (4) abhängig ist vom dimensionslosen Plattenparameter

$$\nu = \frac{p a^4}{E h^4}, \quad (2)$$

wobei  $p$  die gleichförmige Belastung,  $E$  die Elastizitätszahl und  $h$  die Dicke der Platte bezeichnen.

Mit  $n = 3$  entsteht aus (1)  $\frac{w(\varrho)}{w_0} = (1 - \varrho^2)^2$ , das ist jene geometrische Form der gebogenen Platte, wie sie aus der gewöhnlichen Theorie der schwach gebogenen Platte bei Vernachlässigung der Dehnung der Mittelfläche bekannt ist. Die Krümmung der durch Gl. (1) dargestellten ausgebogenen Plattenform erfährt mit großwerdenndem  $n$  erst in der Nähe des Plattenrandes starke Änderungen und bleibt im übrigen Plattenteil nahezu konstant, so daß der Näherungsansatz (1) für die Meridianform das vorhin dargelegte Verhalten der stark ausgebogenen Platte gut wiedergibt.

Der Biegungspfeil  $w_0$  ergibt sich zu

$$\frac{w_0}{h} = \frac{C(1-n)}{(1+n)4\sqrt{3}}, \quad (3)$$

wobei die Abhängigkeit des Wertes  $C$  von  $n$  aus den elastischen Grundgleichungen der stark gebogenen Platte mit Hilfe des Galerkinschen Verfahrens durch eine für  $C$  kubische Gleichung<sup>6</sup> dargestellt werden kann. In der Tab. 1 sind für eine Reihe von ganzzahligen Werten  $n$  die zusammengehörigen Werte  $C$ ,  $\frac{w_0}{h}$  und des Plattenparameters  $\nu$  (mit der Annahme einer Poissonschen Zahl  $\mu = \frac{1}{4}$ ) zusammengestellt.

Der Zusammenhang von  $\frac{w_0}{h}$  und von  $C$  mit der Zahl  $n$  ist im Bereich  $n = 7$  bis 30 nahezu linear.

<sup>4</sup> A. Nádai: Elastische Platten, S. 288. Berlin. 1925.

<sup>5</sup> Vgl. Fußnote 1.

<sup>6</sup> Gl. (40) der in Fußnote 1 angeführten Arbeit.

Tabelle 1.

(Alle Zahlenwerte gelten für eine Poissonsche Zahl  $\mu = \frac{1}{4}$ .)

$n$	$C$	Plattenparameter $\nu$ , Gl. (2)	$\frac{w_0}{h}$	$f(n)$ Gl. (8a)	$\vartheta_b$ Gl. (7)	$\vartheta_d$ Gl. (8b)	$\vartheta_g =$ $\vartheta_d/\vartheta_b$	$k(n)$ Gl. (13)	$\frac{z(n)}{\vartheta_b/k(n)}$ Gl. (14)	$\lambda$ Gl. (18)	$\lambda_T$ Gl. (19)
4	12.04	9.19	1.04	0.00777	12.5	2.698	0.216	0.11023	113.4	1.597	1.596
5	15.4	18.9	1.49	0.01262	14.4	2.874	0.200	0.11786	122.2	2.047	2.044
7	21.02	52.6	2.28	0.02201	18.28	3.130	0.171	0.12840	142.4	2.909	2.905
10	28.7	150.5	3.39	0.03358	24.2	3.372	0.139	0.13789	175.5	4.178	4.177
15	41.4	502.2	5.23	0.04693	34.13	3.603	0.106	0.14641	233.14	6.326	6.336
30	80.8	4127.9	10.91	0.06604	64.06	3.880	0.061	0.15601	410.67	13.054	13.089

Für die Abhängigkeit der Zahl  $n$  vom Plattenparameter  $\nu$  besteht mit großer Näherung die Beziehung

$$n = 1.9 \nu^{1/3}. \quad (4)$$

Die bei der Reckung der Mittelfläche in der Richtung der Meridiantangente und im Parallelkreise entstehenden Spannkkräfte  $T_1 T_2$  (Membranspannkkräfte) lassen sich darstellen durch

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{D}{a^2} \frac{\psi}{\varrho}, \\ T_2 &= \frac{D}{a^2} \frac{d\psi}{d\varrho}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

wenn mit  $D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}$  die Biegssteifigkeit der Platte bezeichnet wird.

Die dimensionslose Spannungsfunktion  $\psi(\varrho)$  wurde aus den elastischen Grundgleichungen zu

$$\psi(\varrho) = \frac{1-\mu^2}{2} C^2 [\alpha_0 \varrho - \alpha_1 \varrho^{2n+1} + \alpha_2 \varrho^{n+2} - \alpha_3 \varrho^3] \quad (6)$$

berechnet, worin die  $\alpha$ -Beiwerte folgende Bedeutung haben:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{1-\mu} \frac{(n-1)^2 [3(n+2)-\mu(n+6)]}{8n(n+1)(n+3)}, \\ \alpha_1 &= \frac{1}{4n(n+1)}, \quad \alpha_2 = \frac{2}{(n+1)(n+3)}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Mit den Ansätzen (1), (5) und (6) lässt sich die in der stark ausgebogenen Platte aufgespeicherte Formänderungsarbeit berechnen, die bei der genäherten Schwingzahlberechnung benötigt wird; sie setzt sich zusammen aus der Energie  $V_b$  der Biegung und jener  $V_d$  der Dehnung der Mittelfläche. Für erstere gilt

$$\begin{aligned} V_b &= \pi D \int_{r=0}^{r=a} \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)^2 r dr = \\ &= \frac{\pi D w_0^2}{a^2} \frac{4(n+1)^2}{(1-n)^2} \int_{\varrho=0}^{\varrho=1} \{2-(n+1)\varrho^{n-1}\}^2 \varrho d\varrho, \\ \text{somit} \quad V_b &= \frac{\pi D w_0^2}{a^2} \vartheta_b, \\ \text{worin} \quad \vartheta_b &= \frac{2(n+1)^2}{n}. \end{aligned} \quad (7)$$

Für  $V_d$  gilt

$$V_d = \frac{\pi}{E h} \int_{r=0}^{r=a} (T_1^2 + T_2^2 - 2\mu T_1 T_2) r dr$$

oder wegen (5)

$$V_d = \frac{\pi D^2}{E h a^2} \left[ \int_{\varrho=0}^{\varrho=1} \left\{ \left( \frac{d\psi}{d\varrho} \right)^2 + \left( \frac{\psi}{\varrho} \right)^2 \right\} \varrho d\varrho - \left| \mu \psi^2 \right|_{\varrho=0}^{\varrho=1} \right].$$

Die Eintragung von (6) liefert

$$\begin{aligned} V_d &= \frac{\pi (1 - \mu^2)}{48} \frac{D h^2 C^4}{a^2} \left[ \int_{\varrho=0}^{\varrho=1} \left[ (\alpha_0 - \alpha_1 \varrho^{2n} + \alpha_2 \varrho^{n+1} - \alpha_3 \varrho^2)^2 + \{ \alpha_0 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (2n+1) \alpha_1 \varrho^{2n} + (n+2) \alpha_2 \varrho^{n+1} - 3 \alpha_3 \varrho^2 \}^2 \right] \varrho d\varrho - \right. \\ &\quad \left. - \mu (\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)^2 \right] = \frac{\pi (1 - \mu^2)}{48} \frac{D h^2 C^4}{a^2} f(n). \end{aligned} \quad (8a)$$

Der in eckige Klammern gestellte Ausdruck werde kurz mit  $f(n)$  bezeichnet; er ist nur abhängig von  $n$ , seine starke Zunahme mit wachsendem  $n$  ist aus Tab. 1 zu entnehmen.

Mit Beachtung von (3) folgt schließlich

$$V_d = \frac{\pi D w_0^4}{a^2 h^2} \vartheta_d,$$

worin

$$\vartheta_d = 48 (1 - \mu^2) \left( \frac{n+1}{n-1} \right)^4 f(n). \quad (8b)$$

Demnach beträgt die gesamte Formänderungsarbeit  $V$  der ausgebogenen Platte

$$V = V_b + V_d = \frac{\pi D w_0^2}{a^2} \vartheta_b \left( 1 + \vartheta_g \frac{w_0^2}{h^2} \right), \quad \left. \vartheta_g = \frac{\vartheta_d}{\vartheta_b} \right\} \quad (9)$$

worin

Eine Zusammenstellung der Zahlenwerte  $\vartheta_b$ ,  $\vartheta_d$ ,  $\vartheta_g$  in ihrer Abhängigkeit von  $n$  (mit  $\mu = 1/4$ ) enthält die Tab. 1.

Zur Berechnung des der ausgebogenen Gleichgewichtsform entsprechenden Biegungspfeiles  $w_0$  setzen wir die bei einer kleinen Änderung  $\delta w_0$  geleistete Arbeit des gleichmäßig verteilten Druckes, die sich zu

$$2 \pi p a^2 \delta w_0 \int_0^1 \left[ 1 + \frac{2(n+1)}{1-n} \left( \frac{\varrho^2}{2} - \frac{\varrho^{n+1}}{n+1} \right) \right] \varrho d\varrho = \pi p a^2 \delta w_0 \frac{n+1}{2(n+3)} \quad (10)$$

berechnet, gleich der Änderung  $\delta V$  von  $V$ ; dies liefert für die statische Durchbiegung  $w_0$

$$\frac{w_0}{h} + 2 \vartheta_g \left( \frac{w_0}{h} \right)^3 = \frac{3\nu(1-\mu^2)}{2} \cdot \frac{n}{(n+1)(n+3)}. \quad (11)$$

Mit  $n = 3$  und für den Fall unendlich kleiner Durchbiegung entsteht hieraus das aus der Kirchhoffschen Plattentheorie bekannte Ergebnis

$$\frac{w_0}{h} = \frac{3\nu(1-\mu^2)}{16}.$$

Die Gl. (11) ist das mit der Energiemethode gewonnene Analogon zur Gl. (40), die aus den elastischen Grundgleichungen mit Hilfe der Galerkinschen Methode in meiner früheren Arbeit<sup>7</sup> abgeleitet worden ist.

Da durch Gl. (4) der Zusammenhang von  $n$  mit dem Plattenparameter  $\nu$  gegeben ist, so lässt sich aus Gl. (11) für jedes  $\nu$  das zugehörige  $\frac{w_0}{h}$  berechnen.

### 3. Berechnung der Grundschatzschwingzahl.

Die Eigenschwingungen erfolgen um die durch Gl. (1) festgelegte Gleichgewichtsform der durch  $p$  belasteten Kreisplatte, in deren Mittelfläche bereits die durch Gl. (5)

<sup>7</sup> Vgl. Fußnote 1.

bestimmten Spannkräfte  $T_1 T_2$  wirken. Wir nehmen die Schwingform der Platte genähert als ähnlich mit der statischen Biegungsfläche an und bezeichnen mit  $\xi$  die Schwingungsamplitude des Plattenmittelpunktes. Dann ergibt sich die Kreisfrequenz  $\omega$  der Schwingung durch Gleichsetzung der Änderung der potentiellen Energie des Systems mit dem Maximum der kinetischen Energie. Da bei Vergrößerung von  $w_0$  auf  $w_0 + \xi$  die durch Gl. (9) gegebene Formänderungsarbeit um den Betrag

$$\frac{\pi D}{a^2} \vartheta_b \left[ 2 w_0 \xi + \xi^2 + \frac{\vartheta_g}{h^2} (4 w_0^3 \xi + 6 w_0^2 \xi^2) \right]$$

(genau bis einschließlich der Glieder klein zweiter Ordnung in  $\xi$ ) zunimmt und der Druck  $p$  hierbei die Arbeit

$$\pi p a^2 \frac{n+1}{2(n+3)} \xi$$

leistet, wofür nach Beseitigung von  $p$  mit Hilfe von (11) auch

$$\frac{\pi D}{a^2} \vartheta_b h \xi \left[ 2 \frac{w_0}{h} + 4 \vartheta_g \left( \frac{w_0}{h} \right)^3 \right]$$

gesetzt werden kann, so beträgt der gesamte Zuwachs an potentieller Energie bei der Schwingung

$$\Delta V = \frac{\pi D}{a^2} \vartheta_b \xi^2 \left[ 1 + 6 \vartheta_g \frac{w_0^2}{h^2} \right]. \quad (12)$$

Die in  $\xi$  linearen Glieder fallen natürlich heraus, da die Ausgangslage eine Gleichgewichtslage ist.

Die maximale kinetische Energie berechnet sich mit  $\mu_1$  als der auf die Flächeneinheit der Platte bezogenen Masse (Platte + Auflast) zu

$$T_{\max} = \pi \omega^2 \mu_1 a^2 \xi^2 \int_{\varrho=0}^{\varrho=1} \left\{ 1 + \frac{2(n+1)}{1-n} \left( \frac{\varrho^2}{2} - \frac{\varrho^{n+1}}{n+1} \right) \right\}^2 \varrho d\varrho = \pi \omega^2 \mu_1 a^2 \xi^2 k(n), \quad (13)$$

worin  $k(n)$  einen nur von  $n$  abhängigen Zahlenwert bedeutet (vgl. Tab. 1). Aus  $\Delta V = T_{\max}$  folgt

$$\omega^2 = \frac{D}{\mu_1 a^4} \vartheta_b \frac{1 + 6 \vartheta_g \frac{w_0^2}{h^2}}{k(n)},$$

oder mit Einführung der nur von  $n$  abhängigen Zahl

$$z(n) = \frac{\vartheta_b}{k(n)} \quad (14)$$

und wegen  $D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}$ :

$$\omega = \frac{h}{a^2} \sqrt{\frac{E h}{\mu_1}} \frac{1}{\sqrt{12(1-\mu^2)}} \sqrt{z(n) \left[ 1 + 6 \vartheta_g \frac{w_0^2}{h^2} \right]}. \quad (15)$$

Für die unbelastete Platte folgt daraus mit  $n = 3$  [dem ein  $z(n) = \frac{320}{3}$  entspricht] und  $\gamma$  als spezifischem Gewichte des Plattenstoffes

$$\omega_0 = \frac{h}{a^2} \sqrt{\frac{E g}{\gamma}} \frac{10 \cdot 33}{\sqrt{12(1-\mu^2)}} \quad (16)$$

mit einer Abweichung von rund 1% gegenüber der strengen Lösung für  $\omega_0$ , welche im Zähler der vorstehenden Gleichung den Zahlenwert 10.215 enthält.<sup>8</sup>

Wenn der Oberflächendruck  $p$  der Platte von einer gleichförmig verteilten schweren

<sup>8</sup> Vgl. Handbuch der Physik, Bd. VI, S. 387. Berlin. 1928.

Auflast herrührt, so ist, falls  $\beta$  den mitschwingenden Teil der ganzen Auflastmasse angibt,

$$\mu_1 = \frac{\gamma h + \beta p}{g},$$

so daß

$$\sqrt{\frac{Eh}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma \left(1 + \beta \frac{p}{\gamma h}\right)}}$$

wird, womit Gl. (15) bei Beachtung von (16) übergeht in

$$\omega = \omega_0 \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \beta \frac{p}{\gamma h}}}. \quad (17)$$

Darin bedeutet

$$\lambda = \frac{1}{10 \cdot 33} \sqrt{z(n) \left[ 1 + 6 \vartheta_g \frac{w_0^2}{h^2} \right]} \quad (18)$$

einen nur von  $n$  abhängigen Zahlenwert. Durch den in Gl. (17) zu  $\omega_0$  hinzugefügten Faktor  $\frac{\lambda}{\sqrt{1 + \beta \frac{p}{\gamma h}}}$  ist somit der Einfluß der Reckung der Mittelfläche der Platte und ihrer mitschwingenden Auflast auf die Grundschatzzahl bestimmt.

Ohne Berücksichtigung der Wirkung der Trägheit des den Oberflächendruck  $p$  übertragenden Mittels (d. h. mit  $\beta = 0$ ) ist dieser Einfluß einfach durch  $\lambda$  gegeben.

Mit  $\mu = \frac{1}{4}$  sind in Tab. 1 für eine Reihe von Werten  $n > 3$  die gemäß (18) zugehörigen  $\lambda$ -Werte bis zu einem Durchbiegungsverhältnisse  $\frac{w_0}{h} = 10 \cdot 9$  angegeben; der Zusammenhang von  $\lambda$  mit  $n$  ( $n > 3$ ) ergibt sich nach Abb. 1 als nahezu linear.

Die von S. Timoshenko<sup>3</sup> für den Einfluß der Dehnung der Mittelfläche abgeleitete Formel zur Berechnung von  $\omega$  lautet, auf die Form des Ergebnisses (17) gebracht,  $\omega = \omega_0 \lambda_T$ , worin

$$\lambda_T = \sqrt{1 + 1 \cdot 464 \frac{w_0^2}{h^2}}; \quad (19)$$

hierbei ist eine Poissonsche Zahl  $\mu = 0 \cdot 3$  angenommen worden; mit dem in Tab. 1 durchwegs verwendeten  $\mu = \frac{1}{4}$  ist der Zahlenwert unter der Wurzel zu ersetzen durch 1.431. Die hiermit für den Bereich  $\frac{w_0}{h} = 1$  bis  $10 \cdot 9$  berechneten Werte  $\lambda_T$  sind in Tab. 1 eingetragen. Diese Werte stimmen nahezu vollständig mit den aus der genaueren Formel (18) gerechneten  $\lambda$  überein, so daß die einfache Formel (19), deren Gültigkeitsbereich ursprünglich entsprechend den bei ihrer Ableitung gemachten Annahmen mit  $\frac{w_0}{h} \leq 1$  angegeben worden ist, den Einfluß der Dehnung der Mittelfläche auch noch für größere Durchbiegungsverhältnisse bis  $10 \cdot 9$  sehr gut wiedergibt.

Die durch  $\lambda$  ausgedrückte Zunahme der Grundschatzzahl  $\omega$  mit wachsendem Plattenparameter ist, wie Tab. 1 zeigt, sehr beträchtlich; ihr steht allerdings eine durch den Nenner der Gl. (17) gegebene Abnahme von  $\omega$  mit wachsendem Drucke  $p$  gegenüber, welche von der Vergrößerung der schwingenden Plattenmasse infolge der mitschwingenden Auflast herrührt. Der hierfür maßgebende Ausdruck  $\sqrt{1 + \beta \frac{p}{\gamma h}}$  läßt sich mit Rücksicht auf Gl. (2) durch  $\sqrt{1 + \beta \frac{E}{\gamma h} \left(\frac{h}{a}\right)^4 \nu}$  ersetzen; es ist daher der Einfluß der mitschwingenden Auflast nicht nur von  $\nu$  und daher wegen Gl. (4) von  $n$  abhängig, sondern auch von  $\frac{h}{a}$ ,  $\beta$  und  $\frac{E}{\gamma h}$ , so daß über das Resultat des

Zusammenwirkens der beiden Einflüsse, nämlich der Dehnung der Mittelfläche und der Trägheit der mitschwingenden Auflast, keine auf den Wert  $n$  allein bezogene Aussage gemacht werden kann.

(Eingegangen am 28. Oktober 1947.)

## Kritische Spannungen dünnwandiger Plattenwerke unter zentrischem Druck.

Von F. Müller-Magyari, Wien.

Mit 7 Textabbildungen.

In einer Reihe von Arbeiten soll der Knickvorgang dünnwandiger Plattenwerke unter zentrischem Druck behandelt werden. Dabei verstehen wir unter einem Plattenwerk in Analogie zum Stabwerk ein elastisches Gebilde, das aus lauter gleichlangen, schmalen Rechteckplatten besteht, welche an den zusammenstoßenden Längsrändern ecksteif verbunden sind. Mindestens ein Element des Plattenwerkes, d. h. eine Teilplatte sei auf Längsdruck beansprucht, ferner soll die Belastung so beschaffen sein, daß sie a) zentrisch, d. h. in der Plattenmittelebene, b) in jeder Teilplatte über die Plattenbreite stückweise konstant verteilt angreift und c) sollen die Teilbelastungen  $p_i$  so anwachsen, daß es einen Proportionalitätsfaktor  $\alpha$  gibt, mit dem sie in der Form

$$p_1 = \alpha \bar{\sigma}_1 \cdot s_1, \quad p_2 = \alpha \bar{\sigma}_2 \cdot s_2, \dots, \quad p_n = \alpha \bar{\sigma}_n \cdot s_n \quad (1)$$

geschrieben werden können, wobei die  $\bar{\sigma}_i$  feste Werte bedeuten. Gesucht sind dann jene Werte von  $\alpha$ , bei denen eine Stabilitätsgrenze erreicht wird.

Die Abkantprofile des Flugzeugbaues sowie gewisse zusammengesetzte Profile des Hoch- und Brückenbaues sind praktische Beispiele von Plattenwerken.

### I. Unverschiebbliche Längskanten.

#### 1. Knickformen eines Plattenwerkes unter zentrischem Druck.

Im folgenden soll eine kurze Übersicht über die möglichen Knickformen gegeben werden: Besitzt das Plattenwerk eine große Länge  $L$  und der Querschnitt ein geringes Trägheitsmoment für eine bestimmte Schwerachse, so tritt bei einer bestimmten kritischen Last, die sich in bekannter Weise nach Euler berechnet, seitliches Wegknicken senkrecht zu dieser Achse ein. Für offene Plattenwerke (offene Profilformen), die besonders drillweich sind, kommt noch eine Verdrehung des Querschnittes hinzu (Typus des Drillknickens<sup>1</sup>). In beiden Fällen krümmen sich die Längskanten sinusförmig, während der Querschnitt angenähert undeformiert bleibt.

Bei kleiner Länge und geringer Plattenstärke tritt Beulen ein, d. h. die einzelnen Teilplatten zeigen die charakteristischen wellenförmigen Verformungen. Hier unterscheiden wir nun zwei Fälle: Bleiben alle Längskanten gerade, so besitzen die auftretenden Beulen Halbwellenlängen von der Größenordnung der Plattenbreiten und man spricht vom kurzweligen Beulen. Dies ist jedoch nicht immer der Fall; ist z. B. die Stützung einer Längskante durch ein abschließendes Stützprofil (Bördel, Sicke, Rippe, Wulst usw.) zu gering oder schließen zwei Nachbarplatten in einem flachen Winkel aneinander, so beteiligt sich das Stützprofil entscheidend am Knickvorgang mit, die Längskante krümmt sich und es treten Beulformen auf, die einen Mischtypus zwischen dem seitlichen Wegknicken und dem kurzweligen Beulen darstellen. Weil in diesen Fällen die Halbwellenlängen der entstehenden Beulen oft ein Vielfaches

<sup>1</sup> R. Kappus: Drillknicken zentrisch gedrückter Stäbe mit offenem Profil im elastischen Bereich. Luftfahrt-Forsch. 14, 444 (1937).

der Plattenbreiten betragen (drei- bis zehnfach), spricht man vom langwelligen Beulen.

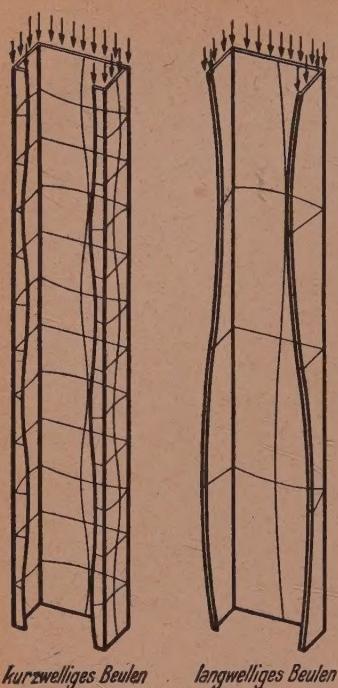


Abb. 1. Kurzwelliges und langwelliges Beulen eines gebördelten dünnwandigen U-Profil unter zentrischem Druck.

Abb. 1 gibt eine anschauliche Gegenüberstellung der beiden Beultypen beim gebördelten U-Profil.

Beim kurzwelligen Beulen, mit dem sich der I. Teil der Arbeit beschäftigt, kann man nun mit guter Näherung annehmen, daß 1. die Längskanten gerade bleiben, 2. die Verschiebungen  $u$  und  $v$  in der Plattenmittelebene um eine Größenordnung kleiner als die Durchbiegungen  $w$  senkrecht dazu sind und 3. an den zusammenstoßenden Längskanten nur die Stützmomente berücksichtigt werden, nicht aber die Stützkräfte. Unter diesen Voraussetzungen ist es gleichgültig, unter welchen Winkeln die einzelnen Teilplatten aneinanderstoßen, und man kann sich das Plattenwerk in eine Ebene geklappt denken, wobei nach der Voraussetzung der Unverschieblichkeit der Längsränder diese

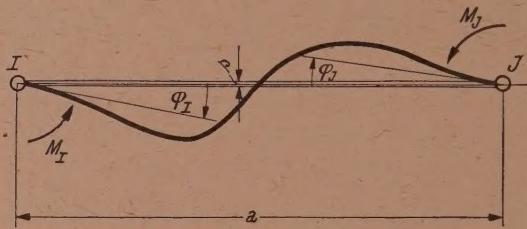


Abb. 2. Bezeichnungen für den  $i$ -ten Teilplattenstreifen eines Plattenwerkes.

durch starre Lagerungen zu ersetzen sind. Man nennt dieses Modell die äquivalente Platte.

## 2. Der beiderseits elastisch eingespannte Plattenstreifen.

Wir nehmen zunächst den einfachsten Fall an, daß jede Teilplatte konstante Wandstärke und über die gesamte Plattenbreite gleichmäßig verteilte Last besitzt. Wir führen dann nach Abb. 2 für die  $i$ -te Teilplatte mit den Längsrändern  $I$  und  $J$  Koordinaten und Verschiebungen in der gezeichneten Weise ein, ferner die Bezeichnungen:

- |   |  |
|---|--|
| $K_i = E_i s_i / 12 (1 - \nu_i^2)$<br>$k_i = K_i / a_i$<br>$M_{I(i)}, M_{J(i)}$<br>$\varphi_{I(i)}, \varphi_{J(i)}$<br>$k_{I(i)}, k_{J(i)}$<br>$r_{I(i)}, r_{J(i)}$<br>$p_i = \sigma_i \cdot s_i$ | $L$ Länge des Plattenwerkes,<br>$a_i$ Plattenbreite,<br>$s_i$ Plattendicke,<br>$E_i$ Elastizitätsmodul,<br>$\nu_i$ Querkontraktionszahl ( $= 0.3$ ),<br>Platten(biege)steifigkeit,<br>bezogene Plattensteifigkeit,<br>Stützmomente (pro Längeneinheit),<br>Winkel der Endtangentialen (an die Querverformung des Plattenstreifens) mit der $y$ -Achse, kurz Drehwinkel genannt,<br>elastische Bettungs- (Einspann-) Ziffern, $M = k \cdot \varphi$ ,<br>Verhältniszahlen, $r_i^{(i)} = k_i^{(i)} / k_i$ , $r_j^{(i)} = k_j^{(i)} / k_i$ ,<br>Längsbelastung (pro Längeneinheit), positiv wenn Druck. |
|---|--|

In Abb. 2 sind positive Stützmomente und positive Einspannungen angegeben. Für die Rechnungen dieses Kapitels kann der Index „ $i$ “ weggelassen werden, da

nur der  $i$ -te Plattenstreifen betrachtet wird und somit keine Verwechslung zu befürchten ist.

Für die Durchbiegung  $w$  gilt die Differentialgleichung

$$K \Delta \Delta w + \sigma s w_{xx} = 0 \quad (3)$$

samt den folgenden Randbedingungen an den Längsrändern  $I$  und  $J$ ,

$$\left. \begin{array}{l} y = 0: w = 0; \quad M_I = K w_{yy} = k_I w_y, \\ y = a: w = 0; \quad M_J = -K w_{yy} = k_J w_y \end{array} \right\} \quad (4)$$

und an den Querrändern, wo wir uns auf den einfachsten Fall beschränken,

$$x = 0 \text{ und } x = L: w = 0; \quad w_{xx} = 0. \quad (5)$$

Tatsächlich ergeben die zahlenmäßigen Untersuchungen, daß diese Randbedingungen keinen großen Einfluß auf die Höhe der kritischen Last haben, sofern sich in Längsrichtung mehr als drei bis vier Halbwellen ausbilden, und wir wollen im folgenden auch diesen Fall annehmen:

Man findet sofort eine Lösung der Differentialgleichung (3), wenn man den Ansatz

$$w(x, y) = \sin \frac{\pi x}{l} \cdot W(y) \quad (6)$$

macht, wobei  $l = L/m$  ( $m$  ganz) die noch zu bestimmende Halbwellenlänge der Beulen bedeutet. Der Ansatz erfüllt die Randbedingungen (5). Für die Querverformung  $W(y)$  ergibt sich dann die gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$W'' - 2 \frac{\pi^2}{l^2} W' + \frac{\pi^2}{l^2} \left( \frac{\pi^2}{l^2} - \frac{\sigma s}{K} \right) W = 0, \quad (7)$$

so daß also die zugehörige charakteristische Gleichung lautet:

$$\varrho^4 - 2 \frac{\pi^2}{l^2} \varrho^2 + \frac{\pi^2}{l^2} \left( \frac{\pi^2}{l^2} - \frac{\sigma s}{K} \right) = 0. \quad (8)$$

Wir betrachten zuerst den Fall

$$\frac{\sigma s}{K} > \frac{\pi^2}{l^2}, \quad \text{d. h. } \sigma > \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \cdot E \cdot \frac{s^2}{l^2} = \sigma_E \quad (9)$$

und führen folgende Abkürzungen ein:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma^* = \frac{\pi^2}{3(1-\nu^2)} \cdot E \cdot \frac{s^2}{a^2}; \quad \lambda = l/a; \quad \vartheta = \sqrt{\sigma/\sigma_E} = 2\lambda\sqrt{\sigma/\sigma^*}, \\ \alpha_1 = \frac{\pi}{\lambda} \sqrt{\vartheta + 1}; \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{\lambda} \sqrt{\vartheta - 1}. \end{array} \right\} \quad (10)$$

Die Durchbiegung  $w(x, y)$  kann man dann in der Form schreiben:

$$w(x, y) = \sin \frac{\pi x}{l} \left( A \sin \frac{\alpha_1 y}{a} + B \cos \frac{\alpha_1 y}{a} + C \sin \frac{\alpha_2 y}{a} + D \cos \frac{\alpha_2 y}{a} \right). \quad (11)$$

Setzt man diese Lösung in die Randbedingungen (4) ein, so kann man die vier Integrationskonstanten  $A, B, C, D$  durch die Stützmomente  $M_I$  und  $M_J$  ausdrücken und erhält schließlich für die Drehwinkel  $\varphi_I, \varphi_J$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_I = M_I \cdot \frac{a}{K} \cdot A_2 + M_J \cdot \frac{a}{K} \cdot A_1 \\ \varphi_J = M_I \cdot \frac{a}{K} \cdot A_1 + M_J \cdot \frac{a}{K} \cdot A_2 \end{array} \right\} \quad (12)$$

dabei bedeuten  $A_1$  und  $A_2$  transzendente Funktionen der Winkelgrößen  $\alpha_1, \alpha_2$ , nämlich

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = \frac{1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \left( \frac{\alpha_2}{\sin \alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\sin \alpha_1} \right), \\ A_2 = \frac{1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \left( \frac{\alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_1} \right). \end{array} \right\} \quad (13)$$

Man kann die Gl. (12) auch nach den Stützmomenten auflösen und erhält

$$\left. \begin{aligned} M_I &= \varphi_I \cdot \frac{K}{a} \cdot \tilde{A}_2 + \varphi_J \cdot \frac{K}{a} \cdot \tilde{A}_1 \\ M_J &= \varphi_I \cdot \frac{K}{a} \cdot \tilde{A}_1 + \varphi_J \cdot \frac{K}{a} \cdot \tilde{A}_2 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

mit den Abkürzungen

$$\tilde{A}_1 = \frac{-A_1}{A_2^2 - A_1^2} = \frac{-A_1}{A_3}; \quad \tilde{A}_2 = \frac{A_2}{A_2^2 - A_1^2} = \frac{A_2}{A_3}; \quad A_3 = A_2^2 - A_1^2. \quad (15)$$

Setzt man in dem Gleichungssystem (12)  $M = k \cdot \varphi$ , so erhält man zwei lineare homogene Gleichungen für  $\varphi_I$  und  $\varphi_J$ , die dann und nur dann nichttriviale Lösungen besitzen, wenn die Gleichungsdeterminante Null wird. Das ergibt die Beulbedingung (16), welche die Bettungsziffern  $k_I$  und  $k_J$  mit der kritischen Spannung  $\sigma_{\text{krit}}$  und der Halbwellenlänge  $l$  in Beziehung setzt:

$$k_I k_J \cdot \frac{a^2}{K^2} \cdot A_3 - (k_I + k_J) \cdot \frac{a}{K} \cdot A_2 + 1 = 0. \quad (16)$$

Durch Einführen der bezogenen Bettungsziffern  $r_I$  und  $r_J$  [vgl. (1)] folgen aus (16) die beiden Beziehungen

$$r_I = \frac{1 - r_J \cdot A_2}{A_2 - r_J \cdot A_3}; \quad r_J = \frac{1 - r_I \cdot A_2}{A_2 - r_I \cdot A_3}. \quad (17)$$

In vielen praktisch vorkommenden Aufgaben kann man von vornherein angeben, daß eine symmetrische oder antimetrische Verformung der Platte eintritt (vgl. einige Beispiele weiter unten), in diesen Fällen lauten dann die Formeln (12), und zwar bei symmetrischer Verformung ( $\varphi_I = -\varphi_J = \varphi$ ;  $M_I = -M_J = M$ ):

$$\varphi = M \cdot \frac{a}{K} \cdot A_4, \quad A_4 = \frac{-1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} (\alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2/2 + \alpha_1 \cdot \operatorname{Tg} \alpha_1/2) \quad (18)$$

und bei antimetrischer Verformung ( $\varphi_I = \varphi_J = \varphi$ ;  $M_I = M_J = M$ ):

$$\varphi = M \cdot \frac{a}{K} \cdot A_5, \quad A_5 = \frac{1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} (\alpha_2 \cdot \operatorname{ctg} \alpha_2/2 - \alpha_1 \cdot \operatorname{Ctg} \alpha_1/2). \quad (19)$$

Durch die obigen Gl. (12) bis (19) sind die analogen Ausdrücke und Formeln der Stabwerkstatik nun für den Plattenstreifen unter zentrischem Druck abgeleitet. Die Unterschiede sind plausibel, die transzententalen Funktionen hängen neben der kritischen Spannung  $\sigma_{\text{krit}}$  noch von der zweiten Veränderlichen  $l$  ab, der Halbwellenlänge der entstehenden Beulen.

### 3. Kritische Mindestspannungen des elastisch eingespannten Plattenstreifens unter zentrischem Druck.

Zur Auswertung der Beulbedingung (16) kann man auf verschiedene Weise vorgehen; am günstigsten wird es sein, für verschiedene, gleichmäßig aufeinanderfolgende Wertepaare von  $\sqrt{\sigma/\sigma^*}$  und  $\lambda$  [vgl. (10)] die Funktionen  $A_2$  und  $A_3$  zu berechnen, womit man unmittelbar aus (16) zusammengehörige Wertepaare der Verhältniszahlen  $r_I$  und  $r_J$  bekommt. Diesen Vorgang kann man in einem Nomogramm anordnen,<sup>2</sup> am Ende der veröffentlichten Arbeiten über die Plattenwerke wird eine tabellenmäßige Darstellung aller bei diesen Problemen wichtigen transzententalen Funktionen gegeben werden.

Die kritische Mindestspannung eines Plattenstreifens bei gegebenen Einspannziffern erhält man dann durch die zusätzliche Bedingung

$$\frac{d\sigma}{dl} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d \sqrt{\sigma/\sigma^*}}{d\lambda} = 0. \quad (20)$$

<sup>2</sup> A. Kromm: Knickung des gedrückten Plattenstreifens mit zur Mittelebene unsymmetrischer Randrippe. Forschungsbericht 1484, verfaßt bei der DVL, Berlin-Adlershof (A 2223).

Zur zahlenmäßigen Auswertung dieser Bedingung wird man verschiedene Werte der kritischen Spannung  $\sigma$  bzw.  $\sqrt{\sigma/\sigma_E}$  graphisch über die zugehörigen Halbwellengrößen  $l$  bzw.  $\lambda$  auftragen und näherungsweise den Minimumswert ablesen.

Obwohl kritische Mindestspannungen nur in dem bisher behandelten Fall  $\vartheta = \sqrt{\sigma/\sigma_E} > 1$  auftreten, sollen doch der Vollständigkeit halber die Ausdrücke der Funktionen  $A_1$  und  $A_2$  in den anderen Fällen angegeben werden:  $\vartheta = \sqrt{\sigma/\sigma_E} = 1$ , dann ist

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\pi\sqrt{2}}{\lambda}; \quad \alpha_2 = 0. \\ A_1 &= \frac{\lambda^2}{2\pi^2} \left( 1 - \frac{\pi\sqrt{2}}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\pi\sqrt{2}}{\lambda}} \right), \\ A_2 &= \frac{\lambda^2}{2\pi^2} \left( 1 - \frac{\pi\sqrt{2}}{\lambda} \cdot \frac{1}{\tan \frac{\pi\sqrt{2}}{\lambda}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (13')$$

$\vartheta < 1$ : Mit den Bezeichnungen  $\alpha_1 = \bar{\alpha}_1$ ;  $\alpha_2 = i\bar{\alpha}_2$ ;  $\bar{\alpha}_{1,2} = \frac{\pi}{\lambda}\sqrt{1 \pm \vartheta}$  wird dann

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\bar{\alpha}_1^2 - \bar{\alpha}_2^2} \left( \frac{\bar{\alpha}_2}{\sin \bar{\alpha}_2} - \frac{\bar{\alpha}_1}{\sin \bar{\alpha}_1} \right), \\ A_2 &= \frac{1}{\bar{\alpha}_1^2 - \bar{\alpha}_2^2} \left( \frac{\bar{\alpha}_2}{\tan \bar{\alpha}_2} - \frac{\bar{\alpha}_1}{\tan \bar{\alpha}_1} \right). \end{aligned} \right\} \quad (13'')$$

$\vartheta = 0$ , d. h.  $\sigma = 0$ ;  $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 = \pi/\lambda$ . Setzt man im vorigen Formelsystem

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{\pi}{\gamma} \left( 1 + \frac{1}{2} \vartheta \right); \quad \bar{\alpha}_2 = \pi/\lambda \left( 1 - \frac{1}{2} \vartheta \right)$$

und bildet den Limes für  $\vartheta \rightarrow 0$ , so wird

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{\operatorname{Cof} \pi/\lambda - \lambda/\pi \cdot \sin \pi/\lambda}{2 \sin^2 \pi/\lambda}; \quad A_2 = \frac{1 - \lambda/\pi \sin \pi/\lambda \operatorname{Cof} \pi/\lambda}{2 \sin^2 \pi/\lambda}; \\ A_3 &= \frac{\lambda^2/\pi^2 \sin^2 \pi/\lambda - 1}{4 \sin^2 \pi/\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (13''')$$

$A_2$  ist für jeden Wert von  $\lambda$  negativ, während  $A_3$  stets positiv ist. Daraus folgt nach (16): Zu jeder Halbwellenlänge  $l$  gibt es Einspannzahlen  $k_I$  und  $k_J$ , von denen mindestens eine negativ sein muß, derart, daß bei verschwindender Druckspannung  $\sigma = 0$  die Stabilitätsgrenze erreicht wird.

Treten noch kleinere (negative) Einspannziffern als die soeben erwähnten auf, so wird die kritische Spannung eine Zugspannung. In diesem Fall ist nach der Annahme in (2)  $\sigma$  negativ und somit nach (10)  $\vartheta = \sqrt{\sigma/\sigma_E}$  imaginär.  $\bar{\alpha}_1$  und  $\bar{\alpha}_2$  werden komplexe Größen

$$\bar{\alpha}_{1,2} = \beta_1 \pm i\beta_2; \quad \beta_{1,2} = \frac{\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{\sqrt{1 - \vartheta^2} \pm 1}{2}}$$

und man erhält durch Einsetzen dieser Ausdrücke in (13) schließlich

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{\beta_1 \sin \beta_2 \operatorname{Cof} \beta_1 - \beta_2 \cos \beta_2 \sin \beta_1}{2 \beta_1 \beta_2 (\sin^2 \beta_2 + \sin^2 \beta_1)}, \\ A_2 &= \frac{\beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_2 - \beta_2 \sin \beta_1 \operatorname{Cof} \beta_1}{2 \beta_1 \beta_2 (\sin^2 \beta_2 + \sin^2 \beta_1)}. \end{aligned} \right\} \quad (13''''')$$

Endlich behandeln wir den wichtigen Grenzfall  $\lambda = \infty$ , der sich praktisch etwa so realisiert, daß sich über die ganze Länge des Plattenstreifens eine einzige Halbwelle ausbildet (nach Voraussetzung soll der Plattenstreifen eine große Länge im Verhältnis zur Plattenbreite besitzen), der Plattenstreifen beult, abgesehen von einem kleinen

Störungsbereich an den gedrückten Querrändern, zylindrisch aus, wobei die Erzeugenden parallel zu den Längsrändern verlaufen. Für  $\lambda = \infty$  sind  $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 = 0$  und die Funktionen  $A_1$  und  $A_2$  werden nach (13) unbestimmt. Man erhält für kleine  $\bar{\alpha}_1$  und  $\bar{\alpha}_2$  folgende Reihenentwicklungen (nach Potenzen von  $\pi^2/\lambda^2$  fortschreitend):

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{6} + (\pi^2/\lambda^2) \left( \frac{31}{3780} \pi^2 - \frac{\sigma}{\sigma^*} \frac{7}{180} \right) + \dots \\ A_2 &= -\frac{1}{3} + (\pi^2/\lambda^2) \left( -\frac{8}{945} \pi^2 + \frac{\sigma}{\sigma^*} \frac{2}{45} \right) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

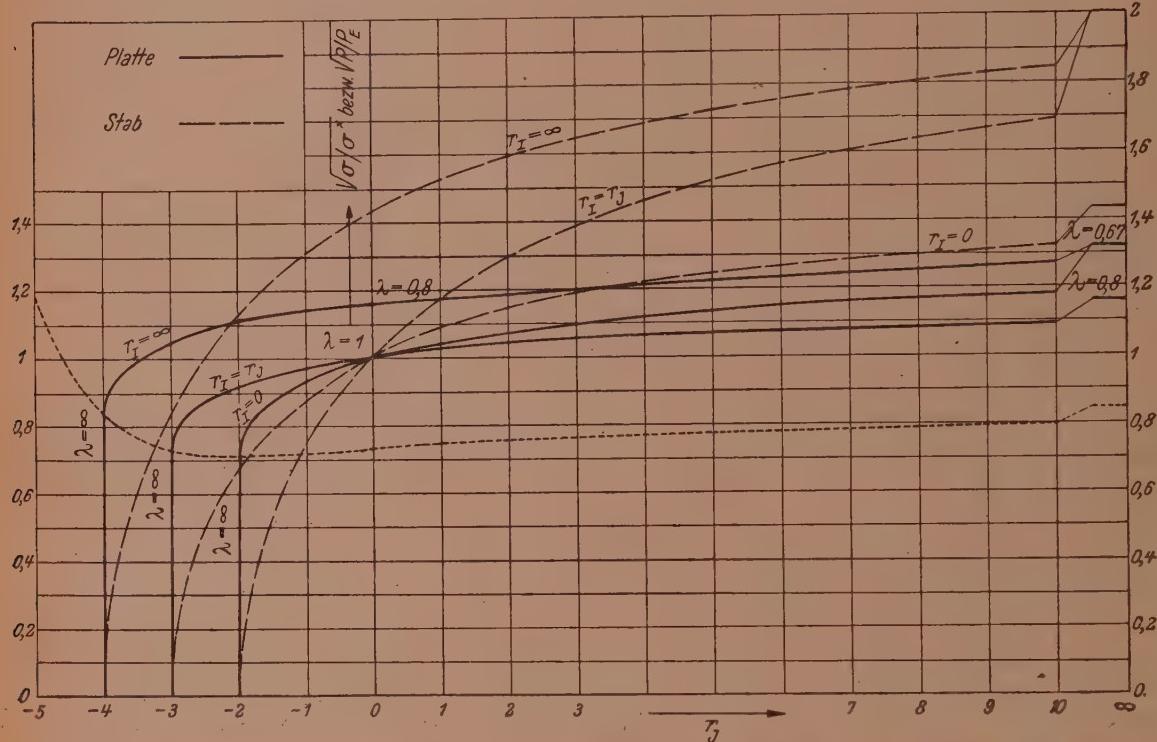


Abb. 3. Gegenüberstellung der kritischen Drucklasten beim Stab und der kritischen Mindestspannungen eines dünnwandigen Plattenstreifens unter zentrischem Druck in Abhängigkeit von den Einspanngraden.

Setzt man diese in (16) ein, so ergibt sich durch Nullsetzen der Konstanten

$$r_I r_J + 4(r_I + r_J) + 12 = 0 \quad (22)$$

genau wie beim zentrisch gedrückten Stab, bloß daß beim Stab zu diesen Einspannziffern die kritische Last  $P = 0$  gehört, während es beim Plattenstreifen einen Grenzwert der kritischen Mindestspannung gibt, der von Null verschieden ist. Er hängt natürlich von den Verhältniszahlen  $r_I$  und  $r_J$  ab [die die Gl. (22) erfüllen müssen] und berechnet sich durch Nullsetzen der Glieder erster Ordnung in  $\pi^2/\lambda^2$  aus Gl. (16)

$$(\sigma/\sigma^*)_{\lambda=\infty} = \frac{7}{\pi^2} \frac{24 - r_I r_J}{32 - r_I r_J}. \quad (23)$$

In diesem Grenzfall  $\lambda = \infty$  ist es also möglich, einen expliziten Ausdruck für die kritische Mindestspannung des gedrückten Plattenstreifens anzugeben.

Abb. 3 gibt nun eine Gegenüberstellung der kritischen Mindestspannungen des gedrückten Plattenstreifens und der kritischen Drucklasten beim Stab, und zwar

für einige wichtige Fälle von Einspanngraden. Als Abszissen wurden die Verhältniszahlen  $r_J = k_J \cdot a/EI$  bzw.  $r_J = k_J \cdot a/K$  gewählt, wobei  $EI$  die Biegesteifigkeit des Stabes und  $K$  die Platten(biege)steifigkeit bedeuten,  $a$  ist einmal die Länge des Stabes und dann die Plattenbreite. Als Ordinaten wurden die bezogenen Lastgrößen  $\sqrt{P_{\text{krit}}/P_E}$  bzw.  $\sqrt{\sigma_{\text{krit}}/\sigma^*}$  gewählt;  $P_E$  ist die Eulerlast eines beiderseits gelenkig gelagerten

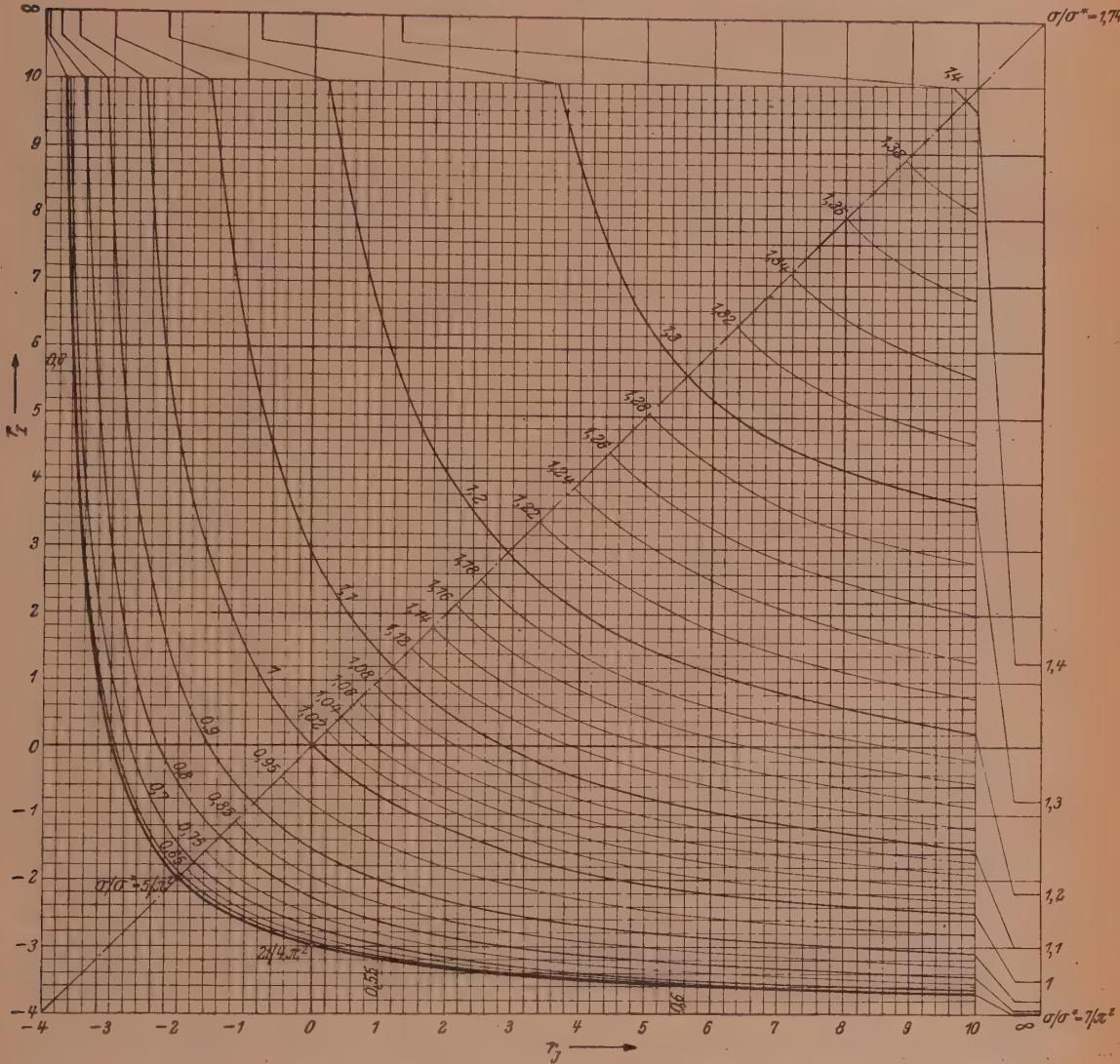


Abb. 4. Diagramm der kritischen Mindestspannungen eines beiderseits elastisch eingespannten Plattenstreifens unter zentrischem Druck.

Stabes. Wie man sieht, verlaufen die Kurven des gedrückten Stabes, beginnend vom Lastwert Null, stetig gekrümmmt, während die Kurven der kritischen Mindestspannungen bei dem von Null verschiedenen Wert nach (23) ansetzen. Für die spätere Anwendung wurden diese Kurven sinngemäß durch das gerade Linienstück bis zu  $\sigma/\sigma^* = 0$  ergänzt, so daß nun eine lückenlose Beziehung der kritischen Mindestspannungen von  $\sigma/\sigma^* = 0$  bis zu dem möglichen Höchstwert bei starrer Einspannung zu den Verhältniszahlen  $r_I$  und  $r_J$  und damit zu den Bettungsziffern  $k_I$  und  $k_J$  besteht. Für eine festgehaltene

Halbwellenlänge verlaufen die Kurven der zugehörigen kritischen Spannungen ähnlich wie die Stabkurven.

Abb. 4 schließlich gibt das vollständige Diagramm der kritischen Mindestspannungen in Abhängigkeit von den bezogenen Bettungsziffern  $r_I$  und  $r_J$  wieder. Es ist natürlich symmetrisch in den Bettungsziffern, so daß nur eine Hälfte ausgezogen erscheint, fallsweise sind dann die Bezeichnungen zu vertauschen. Für kritische Mindestspannungen kleiner als die Grenzwerte nach (23) ordnen wir die bezogenen Bettungsziffern nach Gl. (22) zu, diese Gleichung erscheint in der Darstellung als eine gleichseitige Hyperbel.

In beiden Diagrammen wurden nur jene Werte aufgetragen, die zur knotenfreien Beulform des Plattenstreifens gehören, d. h. zu einer Beulform, die keine Knotenlinien in Längsrichtung aufweist (die periodisch auftretenden Knotenlinien in Querrichtung fassen wir verständlicherweise als nicht charakteristisch für die Beulform auf). Die sog. höheren Beulformen mit ein, zwei usw. Knotenlinien in Längsrichtung (wie z. B. Abb. 2 zeigt) spielen in der Praxis keine so große Rolle, da die maßgebenden kritischen Lasten bei den üblichen Plattenwerkabmessungen für gewöhnlich bei der ersten, knotenfreien Beulform auftreten. In gewissen Fällen (vgl. die Beispiele weiter unten) ist eine Rückführung der Berechnung der kritischen Lasten bei auftretenden höheren Beulformen auf eine solche entsprechend der ersten Beulform möglich, so daß auch hier das Diagramm ausreicht.

#### 4. Kritische Druckspannungen des gesamten Plattenwerkes. Deformations- und Steifigkeitsmethode.

Wir betrachten nunmehr ein Plattenwerk unter zentrischem Druck und setzen voraus, daß es kurzwellig beult, daher die Ergebnisse über den Teilplattenstreifen unter den obigen Voraussetzungen verwendbar sind. Für das gesamte Plattenwerk, welches  $n$  Teilplatten,  $h$  Außen(längs)ränder und  $i$  Innenkanten besitzen soll, haben wir vorerst ganz allgemein  $2n$  unbekannte Drehwinkel  $\varphi_I^{(i_1)}, \varphi_I^{(i_2)}, \dots, \varphi_J^{(j_1)}, \varphi_J^{(j_2)}, \dots$  und  $2n$  unbekannte Stützmomente  $M_I^{(i_1)}, M_I^{(i_2)}, \dots, M_J^{(j_1)}, M_J^{(j_2)}, \dots$ . Dabei geben die Indizes  $i_1, i_2, \dots, j_1, j_2, \dots$  die Bezifferungen jener Teilplatten an, die an den Kanten  $I, J$  usw. zusammenstoßen. Für diese  $4n$  Unbekannten stehen folgende lineare, homogene Gleichungen zur Verfügung:

- Die  $2n$  Gl. (12) [oder in der Schreibweise (14)];
- $h$  Beziehungen  $M = k \cdot \varphi$  an den Außenrändern, wo die Einspannverhältnisse gegeben sind (insbesondere  $M = 0$  bei gelenkiger Lagerung und  $\varphi = 0$  bei starrer Einspannung);
- $2n-h-i$  Kontinuitätsbedingungen

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_I^{(i_1)} = \varphi_I^{(i_2)} = \dots \\ \varphi_J^{(j_1)} = \varphi_J^{(j_2)} = \dots \\ \dots \dots \dots \end{array} \right\} \quad (24)$$

an den Innenkanten infolge der Voraussetzung der Ecksteifheit, und

- Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum M_I^{(i_\nu)} = 0 \quad (25)$$

der Stützmomente an den Innenkanten.

Dabei haben wir in den letzten Gl. (25) die Verdrehsteifigkeit der Versteifungsprofile (Stützprofile) an den Kanten des Plattenwerkes vernachlässigt (sofern überhaupt welche vorhanden sind), was praktisch zulässig ist, wenn es sich um Versteifungsprofile mit offenem Querschnitt handelt, die eine geringe Verdrehsteifigkeit besitzen. Der Einfluß dieser Drillsteifigkeit auf die kritische Last des Plattenwerkes soll erst später behandelt werden.

Insgesamt ergeben sich genau so viele lineare homogene Gleichungen, wie Unbekannte vorhanden sind, und ihre Lösbarkeitsbedingung, d. h. die Gleichungsdeterminante gleich Null gesetzt, ergibt die gesuchte Beulbedingung des gesamten Plattenwerkes, welche die kritische Druckspannung  $\sigma_{\text{krit}}$  mit den gegebenen äußeren Daten des Plattenwerkes verknüpft.

Diese allgemeine Methode kann man zunächst formal vereinfachen, indem man die  $2n-h-i$  Stetigkeitsbedingungen (24) von vornherein aus den Gleichungen herausnimmt und nur die  $i$  Drehwinkel  $\varphi_I, \varphi_J, \dots$  an den Innenkanten als Unbekannte betrachtet, mittels derer sich die Stützmomente  $M_I^{(iv)}, M_J^{(iv)}, \dots$  nach den Gl. (14) und durch die Lagerbedingungen an den Außenrändern ausdrücken. Man bekommt dann in den  $i$  Gleichgewichtsbedingungen (25) die erforderlichen Gleichungen für die Drehwinkel  $\varphi_I, \varphi_J, \dots$ . Dieses Verfahren, in der Stabwerkstatik als Deformationsmethode bekannt, kann somit vollkommen analog auf die entsprechenden Plattenprobleme übertragen werden.

In manchen Fällen lässt sich eine weitere Vereinfachung erzielen, wenn nähere Angaben über die beim Beulen eintretende Querverformung gemacht werden können. So tritt z. B. beim symmetrischen Vierkantrohr (Abb. 5a, gegenüberliegende Teilplatten und ihre Belastungen sind gleich) bei der maßgebenden Beullast die gezeichnete symmetrische Verformung auf. Für die Kante  $A$  gilt dann nach (18)

$$\varphi_A = M_A \cdot \frac{a}{K} \cdot A_4,$$

$$\varphi_A = M_A' \cdot \frac{a'}{K'} \cdot A_4'$$

und somit erhält man nach (25) die Beulbedingung

$$\frac{k}{A_4} + \frac{k'}{A_4'} = 0; \quad (26)$$

dabei bedeuten  $k = K/a$  und  $k' = K'/a'$  die bezogenen Plattensteifigkeiten und  $A_4$  und  $A_4'$  die in (18) angeführten Funktionen von  $\sqrt{\sigma/\sigma^*}$  und  $\lambda$ , jeweils auf die entsprechende Teilplatte bezogen.

Ist die Seite  $a \gg a'$  und das Wandigkeitsverhältnis  $a/s$  sehr groß, so wird die Beulspannung des Plattenwerkes klein, und man wird, um die Beulspannung zu heben, die große Teilplatte  $a$  durch ein Versteifungsprofil oder eine Sicke in Plattenmitte verstauen. Nimmt man an, daß die Biegesteifigkeit der Versteifung genügend groß ist, um kurzwelliges Beulen zu erzwingen, so wird beim Beulen die in Abb. 5b gezeichnete antimetrische Verformung eintreten. Hier kann man nun die Mittelfaser der Platte  $a$  durch eine gelenkige Lagerung ersetzen und hat dann mit  $a'' = a/2$

$$\frac{k''}{A_2''} + \frac{k'}{A_4'} = 0. \quad (27)$$

Bei einer Plattenwand oder einfachen Plattenzelle, wo stets nur zwei Teilplatten aneinanderstoßen, kann man ganz analog wie in der Stabwerkstatik eine Dreie-

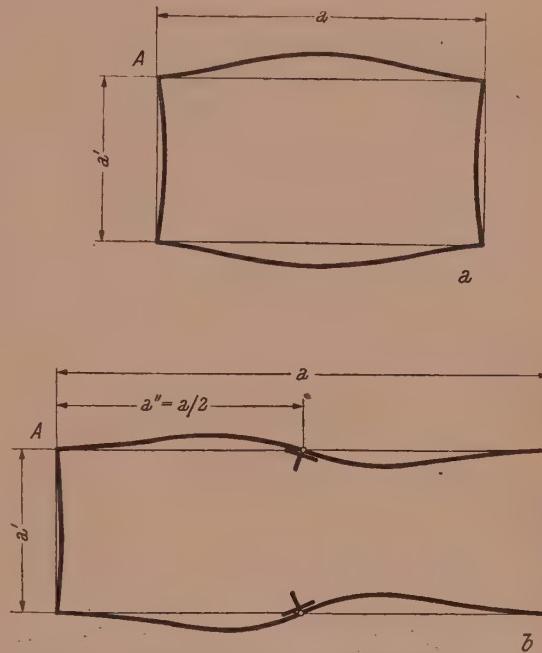


Abb. 5. Symmetrische und antimetrische Beulverformung eines Vierkantrohrs unter zentrischem Druck.

momentengleichung aufstellen.<sup>3</sup> Es ist für zwei aufeinanderfolgende Teilplatten  $i$  und  $j$  mit den Längskanten  $I$ ,  $J$  und  $K$ , die an der Kante  $J$  zusammenstoßen,

$$\varphi_J = \frac{a_i}{K_i} (M_I^{(i)} A_1^{(i)} + M_J^{(i)} A_2^{(i)}),$$

$$\varphi_J = \frac{a_j}{K_j} (M_J^{(j)} A_2^{(j)} + M_K^{(j)} A_1^{(j)}).$$

Nun ist  $M_J^{(i)} + M_J^{(j)} = 0$ , führen wir daher die Bezeichnungen

$$M_I^{(i)} = M_I; \quad M_J^{(j)} = M_J. \quad (28)$$

usw. ein, so ergibt sich durch Gleichsetzen der obigen Ausdrücke

$$M_I \cdot \frac{a_i}{K_i} \cdot A_1^{(i)} - M_J \left( \frac{a_i}{K_i} \cdot A_2^{(i)} + \frac{a_j}{K_j} \cdot A_2^{(j)} \right) + M_K \cdot \frac{a_j}{K_j} \cdot A_1^{(j)} = 0. \quad (29)$$

Ebenso erhalten wir in diesem Falle für die drei aufeinanderfolgenden Drehwinkel

$$\varphi_I \cdot \frac{K_i}{a_i} \cdot \tilde{A}_1^{(i)} + \varphi_J \left( \frac{K_i}{a_i} \cdot \tilde{A}_2^{(i)} + \frac{K_j}{a_j} \cdot \tilde{A}_2^{(j)} \right) + \varphi_K \cdot \frac{K_j}{a_j} \cdot \tilde{A}_1^{(j)} = 0. \quad (30)$$

Dabei ist beim Aufstellen und Auswerten der Beulbedingungen aus den Gleichungssystemen (29) bzw. (30) stets darauf zu achten, ob nicht die trivialen Lösungen  $M = 0$  bzw.  $\varphi = 0$  (für alle Längskanten) möglich sind und auf niedrigere, also maßgebende, kritische Lasten führen.

Als Anwendungsbeispiel behandeln wir das gleichmäßig belastete regelmäßige Plattenpolygon konstanter Wandstärke (regelmäßiges Vielkantrohr), ein Stabilitätsproblem, auf das wir noch später mit Berücksichtigung der Verschieblichkeit der Längsränder zurückkommen werden. Im Falle des kurzweligen Beulens haben wir nach (29) für drei aufeinanderfolgende Stützmomente die folgende lineare Differenzengleichung

$$M_{k-1} \cdot A_1 - 2 M_k \cdot A_2 + M_{k+1} \cdot A_1 = 0, \quad (31)$$

wobei der Index  $k$  die Bezifferung der Längskanten angibt. Die zusammenfallenden Anfangs- und Endkanten werden mit 0 bzw.  $n$  beziffert. Es gelten dann die Randbedingungen

$$\left. \begin{array}{l} M_n = M_0, \\ M_{n+1} = M_1. \end{array} \right\} \quad (32)$$

Der Ansatz  $M_k = r^k$  ergibt mit  $r + 1/r = \varrho$

$$\varrho = \frac{2 A_2}{A_1}. \quad (33)$$

Setzt man in der üblichen Weise  $\varrho = 2 \cos \xi$ , so wird die allgemeine Lösung

$$M_k = C_1 \cos k \xi + C_2 \sin k \xi \quad (34)$$

und die Randbedingungen (32) lauten nach einer Umformung

$$\left. \begin{array}{l} \sin \frac{n}{2} \xi \left( -C_1 \sin \frac{n}{2} \xi + C_2 \cos \frac{n}{2} \xi \right) = 0, \\ \sin \frac{n}{2} \xi \left( -C_1 \sin \frac{n+2}{2} \xi + C_2 \cos \frac{n+2}{2} \xi \right) = 0. \end{array} \right\} \quad (35)$$

Wir verzichten hier auf eine vollständige Diskussion sämtlicher Fälle und stellen nur die wichtigsten Beulbedingungen für das dreiseitige und vierseitige regelmäßige Plattenpolygon auf.

<sup>3</sup> Vgl. etwa J. Ratzersdorfer: Die Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken. Wien: Springer-Verlag. 1936.

Im Fall  $n = 3$  ergibt sich die maßgebende Beulbedingung aus  $\sin \frac{n}{2} \xi = 0$ , und zwar für  $\xi = 2\pi/3$ , dann ist  $\cos 2\pi/3 = -1/2$  und somit lautet die Beulbedingung

$$2A_2 + A_1 = 0. \quad (36)$$

Man erkennt leicht an den umgeformten Randbedingungen (35) und an der allgemeinen Lösung (34), daß es zu dieser Beulbedingung  $\infty$  Querverformungen gibt (die also alle dieselbe kritische Mindestlast liefern). Abb. 6a und 6b zeigen zwei zueinander duale Verformungen, an diesen beiden Beispielen kann man die Beulbedingung auch leicht direkt ableiten.

Im Fall  $n = 4$  (quadratisches Rohr) haben wir als entsprechende Lösung

$$\frac{2A_2}{A_1} = 2 \cos \frac{2\pi}{4}, \text{ d. h. } A_2 = 0 \quad (37)$$

(vgl. Abb. 6c und 6d). Der geringste kritische Wert der Druckspannung, nämlich  $\sigma/\sigma^* = 1$ , tritt aber bei der trivialen Lösung  $M = 0$  für alle Längsränder (s. Abb. 6e)

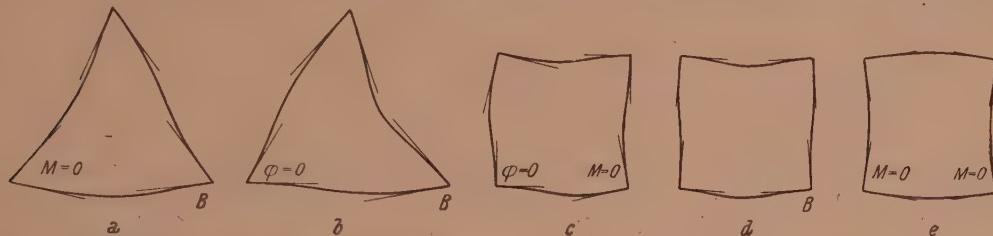


Abb. 6. Beulverformungen des regelmäßigen Dreikant- und Vierkantrohrs konstanter Wandstärke unter zentrischem Druck.

auf, die wir ohne weiteres erhalten hätten, wenn wir ganz entsprechend vom Gleichungssystem (30) für die Drehwinkel ausgegangen wären.

Mit wachsender Anzahl der Teilplatten stoßen diese in einem zu flachen Winkel aneinander, so daß die Voraussetzung der Unverschieblichkeit der Längskanten nicht mehr aufrechterhalten werden kann. Statt den kurzwelligen Beulformen treten, wie bereits oben erwähnt, Mischtypen zwischen dem Beulen und dem seitlichen Wegknicken ein, das regelmäßige Plattenpolygon beult langwellig. Diese Berechnung der kritischen Lasten soll im II. Teil der Arbeit erfolgen.

Zur Auswertung der allgemeinen Beulbedingung eines Plattenwerkes unter zentrischem Druck hat man etwa so vorzugehen: Man kennt die äußeren geometrischen Daten des Plattenwerkes und das Verhältnis der Teilplattenbelastungen zueinander. Bei gleichmäßiger Belastung sind demnach die bezogenen Spannungen  $\sigma/\sigma_i^*$  (bzw.  $\sqrt{\sigma/\sigma_i^*}$ ) und die bezogenen Halbwellenlängen  $\lambda_i = l/a_i$  in ihren Verhältnissen zueinander bekannt. Für eine festgehaltene Halbwellenlänge  $l$ , die in allen Teilplatten dieselbe sein muß, hat man durch Probieren die kritische Spannung  $\sigma_{\text{krit}}$  zu ermitteln, der gestalt, daß die in Form einer Determinante gegebene Beulbedingung erfüllt ist. Dies muß man für mehrere Werte der Halbwellenlänge  $l$  tun, die kritische Mindestspannung ergibt sich dann aus der Bedingung (20), was man meistens graphisch ermittelt.

Im Falle ungleichmäßiger Belastung (auch bei teilweiser Zugbeanspruchung) verläuft alles vollkommen analog, wir bezeichnen nach der in der Einleitung gemachten Voraussetzung (1) die Spannungsverhältnisse

$$\sigma_1^*/\bar{\sigma}_1 = \kappa_1^*; \quad \sigma_2^*/\bar{\sigma}_2 = \kappa_2^*; \dots; \quad \sigma_n^*/\bar{\sigma}_n^* = \kappa_n^* \quad (38)$$

und betrachten nunmehr die Quotienten  $\kappa/\kappa_i^*$  (bzw.  $\sqrt{\kappa/\kappa_i^*}$ ). Wir ermitteln wie

vorhin den kritischen Wert des Proportionalitätsfaktors  $\alpha_{\text{krit}}$  und entsprechend seinen Mindestwert  $\alpha_{\text{krit min}}$ , womit nach (1) die kritische Lastverteilung und ihr Mindestwert bestimmt ist.

Die Beulbedingung ist für Plattenwerke mit mehreren Teilplatten im allgemeinen recht kompliziert, so daß in diesen Fällen der Deformationsmethode ein Verfahren vorzuziehen ist, das in der Stabwerkstatistik als Steifigkeitsmethode bekannt ist.<sup>4</sup> Um keine neuen zusätzlichen Bezeichnungen einzuführen, sei das Verfahren für die Ermittlung der bisher verwendeten Bettungs- oder Einspannziffern erklärt, die Unterschiede gegenüber den in der Stabwerkstatistik eingeführten üblichen Bezeichnungen sind unwesentlich und bestehen nur in einigen Vorzeichenvertauschungen.

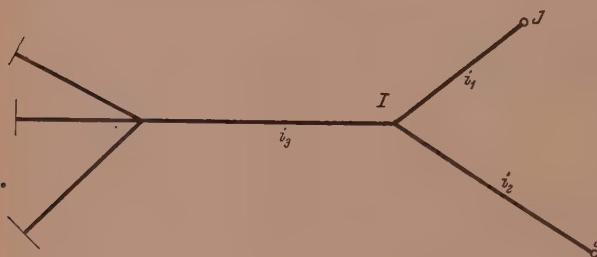


Abb. 7. Schematische Skizze eines allgemeinen Plattenwerkes mit gelenkig gelagerten und starr eingespannten Außenlängsrändern.

Das Verfahren lautet kurz so:

Man beginnt an einem Außenrand  $J$  (Abb. 7), wo die Bettungsziffer  $k_J = M_J/\varphi_J$  (bzw. die bezogene Bettungsziffer  $r_J$ ) bekannt ist und ermittelt für eine festgehaltene Halbwellenlänge  $l$  (bzw.  $\lambda = l/a$ ) und für eine angenommene kritische Spannung  $\sigma_{\text{krit}}$  (bzw.  $\sigma_{\text{krit}}/\sigma^*$  oder  $\sqrt{\sigma_{\text{krit}}/\sigma^*}$ ) nach Formel (17) die Bettungsziffer am anderen Längsrand der Teilplatte

$$k_I = \frac{k_i - k_J \cdot A_2^{(i)}}{A_2^{(i)} - k_J/k_i \cdot A_3^{(i)}}; \quad (39)$$

$k_i = K_i/a_i$  und die Werte der Funktionen  $A_2$  und  $A_3$  [s. (13)] beziehen sich immer auf die betreffende Teilplatte; insbesondere hat man bei gelenkiger Lagerung  $k_J = 0$

$$k_I = \frac{k_i}{A_2^{(i)}} \quad (39')$$

und bei starrer Einspannung  $k_J = \infty$

$$k_I = \frac{k_i A_2^{(i)}}{A_3^{(i)}}. \quad (39'')$$

An der Innenkante  $I$  ist nach (25)

$$\sum k_I^{(i_v)} = 0, \quad (40)$$

wobei die Bezifferung über alle Teilplatten lautet, die an der Innenkante  $I$  zusammenstoßen. Aus (40) berechnet man die unbekannte Bettungsziffer  $k_I^{(i_v)}$  und fährt nun analog fort, bis man wieder auf einen Außenrand am anderen Ende des Plattenwerkes kommt, oder an eine Innenkante, wo die Bettungsziffern, von der anderen Seite her gerechnet, bekannt sind. War die am Außenrand errechnete Bettungsziffer größer als die gegebene oder ist die Summe der errechneten Bettungsziffern an einer Innenkante größer als Null, so war die geschätzte kritische Spannung zu hoch angenommen und umgekehrt. Dies folgt sehr leicht aus der Tatsache, daß die kritischen Spannungen eines Plattenstreifens unter zentrischem Druck für eine festgehaltene Halbwellenlänge mit wachsender Bettungsziffer monoton wachsen (vgl. Abb. 3). Natürlich führt dieses Verfahren, wenn man es rechnerisch verfolgt, auf die obige, in Form einer Determinante gegebenen Beulbedingung. Der Vorteil der Steifigkeitsmethode liegt aber in der Aufspaltung der Berechnung der komplizierten Beulbedingung in lauter einfache gleichartige Rechenvorgänge, so daß man den Vorgang z. B. in ein Nomogramm anordnen kann. Dazu genügt die graphische Darstellung der vollständigen

<sup>4</sup> Vgl. etwa L. Kirste: Momentenverteilungs- und Stabilitätsrechnung nach der Steifigkeitsmethode. Österr. Ingenieur-Arch. H. 1/2, 117 (1946).

Beulbedingung des gedrückten Plattenstreifens, wie sie durch die Gl. (16) gegeben ist.

Die Erschwerung der Berechnung der kritischen Druckspannungen eines Plattenwerkes gegenüber der analogen Aufgabe der Stabwerkstatik besteht nun, abgesehen von den komplizierteren Funktionen und Winkelgrößen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ , darin, daß sämtliche Berechnungen für mehrere Werte der Halbwellenlänge  $l$  erfolgen müssen und erst durch die zusätzliche Bedingung (20) die kritische Mindestlast gefunden werden kann. Dazu muß man ungefähr den Bereich der zugehörigen Halbwellenlänge kennen. Im nächsten Kapitel soll nun ein Näherungsverfahren abgeleitet werden, das diese Schwierigkeit umgeht und brauchbare Resultate liefert.

### 5. Näherungswert (untere Schranke) für die Mindestbeulspannungen dünnwandiger Plattenwerke unter zentrischem Druck.

Um zu Näherungswerten zu gelangen, deren numerische Ermittlung möglichst einfach ist, verändern wir das ursprüngliche Problem in der Weise, daß wir das Plattenwerk bzw. die äquivalente Platte an den Längskanten auftrennen. Um die bestandene gegenseitige Beeinflussung zu berücksichtigen, bringen wir wieder elastische Einspannungen mit den Bettungsziffern  $k_I^{(i_\nu)}$ ,  $k_J^{(j_\nu)}$ , ... an, über deren Größe wir jedoch vorläufig nichts aussagen. Ferner berücksichtigen wir überhaupt keine Kontinuitätsbedingungen (24).

Für die folgenden Betrachtungen können wir uns auf den Fall der gleichmäßigen Belastung beschränken, die Ergebnisse übertragen sich wörtlich, wenn bei ungleichmäßiger Belastung an Stelle der bezogenen Spannungen  $\sigma/\sigma_i^*$  nach Voraussetzung (1) und mit den Bezeichnungen (38) die Quotienten  $\nu/\nu_i^*$  treten.

Es ist klar, daß die kritische Mindestspannung des in obiger Weise vereinfachten Plattenwerkes die kleinste Beulspannung der Teilplatten, jede für sich genommen, beträgt, denn bei dieser Spannung, welche eine Mindestspannung der betreffenden Teilplatte ist, wird die Teilplatte beulen, während alle anderen unausgebeult bleiben. Damit ist aber eine von der trivialen Lösung ( $\text{alle } \nu_i = 0$ ) verschiedene Lösung unter den nun angenommenen Randbedingungen gefunden. Oder mit anderen Worten, wenn wir die kritischen Spannungen als Eigenwerte unseres Eigenwertproblems auffassen: Die Eigenwerte des vereinfachten Gebildes sind identisch mit der Gesamtheit der Eigenwerte der Teilplatten, jede für sich genommen. Wir ordnen die Eigenwerte nach ihrer Größe und interessieren uns im folgenden nur für den kleinsten Eigenwert. Dieser ist eine stetig differenzierbare Funktion der angenommenen Bettungsziffern  $k_I^{(i_\nu)}$ ,  $k_J^{(j_\nu)}$ , ... an den aufgetrennten Rändern. Es ist leicht einzusehen, daß durch folgende Spezialisierungen der Bettungsziffern grobe Schranken für den genauen Beulwert (damit ist immer die Mindestbeulspannung des ursprünglichen Problems verstanden) bestimmt sind, und zwar 1. eine grobe untere Schranke, wenn alle verfügbaren

$$k_I^{(i_\nu)} = k_J^{(j_\nu)} = \dots = 0 \quad (41)$$

gesetzt werden, 2. eine grobe obere Schranke im Fall

$$k_I^{(i_\nu)} = k_J^{(j_\nu)} = \dots = \infty. \quad (42)$$

Man vermutet daher, daß es durch passende Wahl der noch freigehaltenen Bettungsziffern gelingt, bessere Näherungswerte für den genauen Beulwert zu finden. Ohne auf das Problem in allgemeiner Weise einzugehen,<sup>5</sup> legen wir einfach in Anlehnung an die obigen Entwicklungen fest, daß die unbekannten Bettungsziffern an den

<sup>5</sup> Die damit zusammenhängenden Fragestellungen zur näherungsweisen Ermittlung von Eigenwerten sollen in einer demnächst erscheinenden Arbeit des Verfassers behandelt werden.

Innenkanten die Bedingungen  $\sum k_I^{(i_p)} = 0$  erfüllen sollen und ferner sollen alle Teilplatten des vereinfachten Gebildes bei der gleichen Mindestbeulspannung  $\bar{\sigma}$  beulen. Diese Spannung betrachten wir als eine bessere Näherung für den genauen Beulwert.

Der Unterschied gegenüber dem ursprünglichen Problem besteht nun darin, daß sich jetzt infolge der Vernachlässigung der Kontinuitätsbedingungen in jeder Teilplatte Beulflächen mit ungleichen Halbwellenlängen ausbilden, und zwar werden sich jene Halbwellenlängen einstellen, die zur kritischen Mindestbeulspannung  $\bar{\sigma}$  des Teilplattenstreifens gehören. Wir haben somit eine Reduktion des ursprünglich zweidimensionalen Problems vorgenommen, die Halbwellenlänge  $l$  tritt nun nicht mehr in Erscheinung, und man gewinnt den Näherungswert  $\bar{\sigma}$ , indem man aus den für jede Teilplatte angeschriebenen Gleichungen

$$\bar{\sigma} = f(k_I, k_J), \quad (43)$$

welche die Abhängigkeit der kritischen Mindestspannungen eines Plattenstreifens von den Bettungsziffern angeben, die Bettungsziffern eliminiert. Das Verfahren ist vollkommen der Methode der Stabwerkstatik nachgebildet, an Stelle der kritischen Drucklasten treten beim Plattenproblem die Mindestbeulspannungen, wobei die Kurven, die die Gl. (43) darstellen, durch das lotrechte Geradenstück von  $(\sigma/\sigma^*)_{1-\infty}$  bis  $\sigma/\sigma^* = 0$  ergänzt wurden (s. Abb. 3). Während wir aber bei den Stabaufgaben auf diese Weise die genauen kritischen Lasten erhalten, bekommen wir jetzt nur eine untere Schranke des genauen Beulwertes des Plattenwerkes. Dies beweisen wir leicht, indem wir uns an die äquivalente Formulierung als ein Eigenwertproblem erinnern, für das ganz allgemein folgender Satz gilt:<sup>6</sup>

Mildert man in einem Minimumsproblem (Variationsproblem) die Bedingungen, so fällt der Wert des Minimums bzw. steigt nicht an.

Das vereinfachte Problem ist nun aus dem genauen ursprünglichen Problem in der Weise hervorgegangen, daß auf die Gleichheit der Halbwellenlängen zur Erfüllung der Stetigkeitsbedingungen an den Längsrändern verzichtet wurde, d. h. die Randbedingungen wurden gemildert. Damit ist aber der Bereich der zulässigen Funktionen des Variationsproblems erweitert und der Minimumswert kann nicht steigen.

Betrachten wir die zu unserem Näherungswert gehörigen Eigenfunktionen, d. h. die Beulflächen der einzelnen Teilplatten, so stellen wir fest, daß sie wohl die Differentialgleichung (3), nicht aber einen Teil der Randbedingungen (nämlich die Stetigkeitsbedingungen in bezug auf die Neigungen an den zusammenstoßenden Längsrändern) erfüllen. Das Aussehen der Beulfläche des genauen Problems wird also durch diese Funktionen schlecht wiedergegeben, aber wie bei vielen ähnlichen Verfahren ist dies auch für unsere Zwecke nicht so wichtig, da es vor allem auf den Eigenwert ankommt.

Das Verfahren, bildet somit ein Gegenstück zum Ritzschen Näherungsverfahren, wo die Näherungsfunktionen gerade die Randbedingungen (d. h. alle geometrischen und möglichst viele dynamische) erfüllen und nicht der Differentialgleichung des Problems genügen. Es gehört damit in die Reihe jener Verfahren und Methoden zur näherungsweisen Berechnung von Eigenwerten eines Variationsproblems, wie sie besonders E. Trefftz<sup>7</sup> öfter angewandt hat und die alle auf eine Milderung des Variationsproblems beruhen.

Um die unbekannten Bettungsziffern aus den Gl. (43) zu eliminieren und den Näherungswert der Mindestbeulspannung zu berechnen, geht man analog der oben erklärten Steifigkeitsmethode vor. Zu diesem Zweck müssen eine hinreichende Anzahl

<sup>6</sup> Vgl. R. Courant und D. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik. Berlin: Springer-Verlag. 1931.

<sup>7</sup> E. Trefftz: Verh. d. 2. intern. Kongr. Techn. Mech., Zürich. 1926. S. 131.

der Funktionen (43) tabellarisch oder gezeichnet vorliegen, um die Zwischenwerte genügend genau interpolieren zu können, wie es z. B. in Abb. 4 der Fall ist. Man beginnt an einem Außenrand  $J$  (vgl. Abb. 7), wo die Bettungsziffer bekannt ist, und wählt einen Näherungswert für die kritische Mindestspannung. Dabei leisten die nach (41) und (42) bestimmten groben unteren und oberen Schranken gute Dienste. Man ermittelt nun nach Abb. 4 die Bettungsziffer am anderen Längsrandsrand der Teiplatte und nach (40) die unbekannte Bettungsziffer des anstoßenden Längsrandes des nächsten Plattenstreifens usw. Da das Diagramm Abb. 4 nur bezogene Größen anführt, muß man die Verhältnisse immer umrechnen. Tritt dabei der Fall ein, daß die umgerechnete bezogene Spannung in den lotrechten Teil der Kurven (vgl. auch Abb. 3) fällt, so bedeutet dies keine Besonderheit, eher eine Erleichterung der Ablesemöglichkeit, da nun die zugehörige Bettungsziffer auch nach Gl. (22) bekannt ist.

Wieder erfährt das Verfahren in vielen Fällen eine Vereinfachung, wenn man von vornherein gewisse Annahmen über die eintretende Verformung machen kann, wie an einigen Beispielen erörtert werden soll.

Für das Rechteckplattenwerk konstanter Wandstärke und gleichmäßiger Belastung ergibt sich unter der Annahme der symmetrischen Verformung z. B. für  $a' = a/2$  die grobe untere Schranke  $\sigma/\sigma^* = 1$  und die grobe obere Schranke  $\sigma/\sigma^* = 1.74$ . Rechnet man diesen oberen Wert auf die  $a'$ -Seite um (es ist  $\sigma'^* = 4 \sigma^*$ ), so ergibt sich  $\sigma/\sigma'^* = 0.435$ , d. h. der Näherungswert  $\bar{\sigma}$  fällt sicher in den lotrechten Teil der Kurve der Mindestbeulspannungen des symmetrisch eingespannten Plattenstreifens  $a'$ . Es ist somit  $r_{A'} = -2$  und daher  $r_A = +4$ , und man erhält den Näherungswert  $\bar{\sigma}/\sigma^* = 1.245$ . Die folgende Tabelle gibt die Näherungswerte  $\bar{\sigma}$  für einige Verhältnisse  $a'/a$  wieder. Für sehr kleine Verhältnisse  $a'/a$  sind die Werte unbrauchbar, da nicht mehr kurzwelliges Beulen eintreten wird, außer die Längskanten werden unverschieblich gestützt.

#### Rechteckiges Plattenwerk konstanter Wandstärke und gleichmäßiger Belastung. Kurzwelliges Beulen.

$a'/a$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
Näherungswert .....	1.74	1.51	1.39	1.32	1.28	1.25	1.22	1.19	1.15	1.09	1
Genauer Wert .....	1.74					1.27					1

Um den Fehler abzuschätzen, den man durch Anwendung des obigen Näherungsverfahrens begeht, kann man entweder stichprobenweise für rechnerisch besonders einfache Querschnittsverhältnisse die genaue Lösung ermitteln oder mittels des Ritzschen Verfahrens obere Schranken des Mindestbeulwertes berechnen.

Beim regelmäßigen dreiseitigen Plattenpolygon konstanter Wandstärke und gleichmäßiger Belastung haben wir unter der Voraussetzung der in Abb. 6a gezeichneten Verformung ähnlich wie oben  $r_B' = -3$  (einseitig gelenkig gelagerter Plattenstreifen mit  $a' = a/2$ ), somit  $r_B = +6$  und nach Abb. 4  $\sigma/\sigma^* = 1.15$ . Rechnen wir dagegen unter Zugrundelegung der in Abb. 6b gezeichneten Verformung, so müssen wir einmal den einseitig starr eingespannten Plattenstreifen betrachten und dann den symmetrisch elastisch eingespannten Streifen, beide gleicher Breite, die an der Kante  $B$  zusammenstoßen. Der starr eingespannte Plattenstreifen wird am anderen Längsrandsrand negativ eingespannt sein, während der andere positive Einspannung besitzt. Die unbekannten Bettungsziffern sind so zu finden, daß sie negativ gleich sind und die zugehörigen kritischen Mindestspannungen der Plattenstreifen gleich groß sind. Es ergibt sich  $r_B^{(1)} = -2.4$ , also  $r_B^{(2)} = +2.4$  und dazu  $\sigma/\sigma^* = 1.175$ . Dieser Wert stellt also eine bessere untere Schranke dar als die vorhin ermittelte.

Beim quadratischen Rohr haben wir nach Abb. 6c und dem Diagramm Abb. 4 gleich den genauen Wert  $\sigma/\sigma^* = 1.35$ , da dieser Wert ohnedies eine Mindestbeulspannung des Plattenstreifens darstellt. Unter Zugrundelegung der in Abb. 6d gezeichneten Querverformung ergibt die Näherungsmethode  $r_B' = -3$ , d. h.  $r_B = +6$  und  $\sigma/\sigma^* = 1.31$ , ein Wert, der auch nicht viel vom genauen Resultat abweicht.

Kennt man nun auch die Mindestbeulspannungen des einseitig elastisch eingespannten freistehenden und gebördelten Plattenstreifens unter zentrischem Druck, so läßt sich die Näherungsmethode auch auf jene Plattenwerke anwenden, die freistehende oder gebördelte Endkanten besitzen, immer vorausgesetzt, daß kurzwelliges Beulen eintritt. Solche Plattenwerke treten besonders häufig im Leichtbau in der Form der dünnwandigen Abkantprofile auf (U-, Z-, A-, L-Profile). Da es sich aber dabei bereits um verschiebbliche Längskanten handelt, soll dieser Fall erst im nächsten Teil behandelt werden.

### Zusammenfassung des I. Teiles.

Für dünnwandige Plattenwerke unter zentrischem Druck werden unter der Voraussetzung unverschieblicher Längskanten, welche im Falle des kurzwelligen Beulens erfüllt ist, die analogen Beziehungen und Formeln wie für Stabwerke unter zentrischem Druck hergeleitet und ein Näherungsverfahren für die Berechnung der Mindestbeulspannung des gesamten Plattenwerkes angegeben, das von den kritischen Mindestspannungen des beiderseits elastisch eingespannten Plattenstreifens ausgeht. Die hierfür vorliegenden Ergebnisse wurden in eine brauchbare Form gebracht und für den Fall negativer Einspannzahlen erweitert.

(Eingegangen am 13. März 1947.)

## Einige Probleme der Strömung, des Wärmeüberganges und der Diffusion bei Laminarströmung längs einer ebenen Platte.\*

Von H. Schuh, Wien.

Mit 7 Textabbildungen.

### I. Einleitung.

Die Bewegung von flüssigen und gasförmigen Medien wird durch die Navier-Stokeschen Differentialgleichungen beherrscht. Diese lauten bei zweidimensionaler Strömung und konstanten Stoffwerten in kartesischen Koordinaten:

$$\left. \begin{aligned} \varrho \frac{\partial u}{\partial t} + \varrho u \frac{\partial u}{\partial x} + \varrho v \frac{\partial u}{\partial y} &= X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \varrho \frac{\partial v}{\partial t} + \varrho u \frac{\partial v}{\partial x} + \varrho v \frac{\partial v}{\partial y} &= Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right); \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

dazu tritt die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Dabei sind  $u, v$  die Geschwindigkeiten in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung,  $X$  und  $Y$  die Massenkräfte,  $p$  der Druck,  $\varrho$  die Dichte und  $\mu$  die Zähigkeit. Eine Lösung der nichtlinearen

\* Eine gekürzte Fassung dieser Arbeit wurde ursprünglich im Juli 1944 zur Veröffentlichung für ein Festheft zum 70. Geburtstag von Prof. L. Prandtl eingereicht, aber in diesem aus Platzmangel nicht abgedruckt; nach geraumer Zeit erschien sie dann — für den Verfasser überraschend — im Heft 2, Bd. 25/27 (Mai 1947) der neuerschienenen Zeitschr. f. angew. Math. und Mechanik, nachdem die vorliegende Arbeit im Dezember 1946 für das Österr. Ing.-Archiv eingereicht worden war.

Differentialgleichungen (1) ist im allgemeinen Fall bisher nicht gelungen; auch dann nicht, wenn man sich zur Vereinfachung auf stationäre Werte beschränkt, wodurch vom mathematischen Standpunkt aus auch alle Fälle turbulenter Strömung ausgeschlossen werden müssen. Einer rechnerischen Behandlung zugänglich sind stationäre Strömungen bei sehr kleinen und bei großen Reynoldsschen Zahlen;<sup>1</sup> im ersten Fall können die Konvektionsglieder  $(u \frac{\partial u}{\partial x}, v \frac{\partial u}{\partial y} \text{ usw.})$  in (1) vernachlässigt werden, im zweiten Fall kann von der Wirkung der Zähigkeit abgesehen werden, solange keine Strömungsablösung von festen Wänden erfolgt („Potentialströmung“); ausgenommen bleibt dabei eine sehr dünne Schicht unmittelbar an der Wand fester Körper („Grenzschicht“), in welcher die Längsgeschwindigkeit mit steilem Gradienten auf den Wert Null an der Wand (wegen der Haftbedingung) abfällt und in welcher die Zähigkeitskräfte nicht vernachlässigt werden dürfen. Die Strömung in diesen Grenzschichten kann ebenfalls mathematisch behandelt werden, solange sie laminar bleibt. Derartige Grenzschichten bilden sich an allen umströmten Körpern aus und stehen in Beziehung zu deren Strömungswiderstand; dieser röhrt von den an den Körper angreifenden Kräften her, die wir in zwei Komponenten zerlegen können: Kräfte, die senkrecht auf den Körper wirken (Druckkräfte) und solche, die tangential infolge der Zähigkeit am Körper angreifen (Schubspannungen). Wenn keine Ablösung der Strömung vom Körper stattfindet (Stromlinienkörper), lassen sich die Druckkräfte aus der Potentialströmung um den Körper in guter Näherung berechnen und die Schubspannungen aus der Grenzschichtströmung.

Ein Körper, bei welchem wir von vornherein nur Schubspannungen erwarten können, ist die längsangeströmité ebene Platte, von welcher L. Prandtl 1904 erstmals zeigen konnte, daß auch bei hohen Reynoldsschen Zahlen ein Widerstand mathematisch aus den Navier-Stokeschen Gleichungen berechnet werden kann. Dabei werden die Reynoldsschen Zahlen hoch, jedoch nicht zu hoch angenommen, so daß die Strömung noch laminar bleibt ( $Re_x = \frac{U x}{\nu} < 300000$ ,  $x$  Entfernung von der Plattenvorderkante); die Ausdehnung der Grenzschicht senkrecht zur Platte ( $y$ -Richtung) ist dann klein im Verhältnis zu ihrer Ausdehnung in Richtung der Platte ( $x$ -Richtung), so daß man sich, wie nach Prandtl<sup>2</sup> mathematisch bewiesen hat, in den Gl. (1) auf die  $u$ -Komponente beschränken, außerdem  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  gegen  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  vernachlässigen und  $\frac{dp}{dx} = 0$  setzen kann. Für konstante Stoffwerte ergibt sich somit (wobei die kinematische Zähigkeit  $\nu = \frac{\mu}{e}$  eingeführt wird):

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3)$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3a)$$

mit den Randbedingungen ( $U$  konstante Anströmgeschwindigkeit vor der Platte):

$$\left. \begin{array}{l} y = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \\ y = \infty, \quad u = U. \end{array} \right\} \quad (4)$$

Durch Einführung des dimensionslosen Wandabstandes  $\xi$  und der Stromfunktion  $\psi$

$$\xi = \frac{y}{2} \sqrt{\frac{U}{\nu x}}, \quad \psi = \sqrt{U x \nu} f(\xi) \quad (5)$$

<sup>1</sup> Als Reynoldssche Zahl wird  $\frac{U d}{\nu}$  bezeichnet, wobei  $U$  eine charakteristische Geschwindigkeit,  $d$  eine charakteristische Länge und  $\nu$  die kinematische Zähigkeit bedeutet.

<sup>2</sup> L. Prandtl: Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandl. d. III. Intern. Math. Kongr., S. 484. Heidelberg. 1904.

lassen sich (3) und (3a) auf eine gewöhnliche Differentialgleichung reduzieren, wobei die Kontinuitätsgleichung (3a) durch den Ansatz  $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$  und  $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$  erfüllt wird. Man erhält somit:

$$f''' + ff'' = 0. \quad (6)$$

Eine numerische Lösung dieser Differentialgleichung (6) stammt von Blasius<sup>3</sup> (s. auch<sup>4, 5</sup>). Über Grenzschichten, auch solche bei Druckabfall und -anstieg ( $\frac{dp}{dx} \neq 0$ ) gibt es heute eine umfangreiche Literatur.<sup>5</sup>

Besteht zwischen Körper und strömendem Medium eine Temperaturdifferenz, so findet zwischen beiden ein Wärmeaustausch statt, für den die Wärmeleitungs-gleichung gilt:

$$\varrho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \varrho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} + \varrho c_p v \frac{\partial T}{\partial y} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (7)$$

dabei ist  $T$  die Temperatur,  $\lambda$  die Wärmeleitfähigkeit und  $c_p$  die spezifische Wärme bei konstantem Druck; in der Differentialgleichung (7) ist zunächst die durch Reibung erzeugte Wärmemenge nicht berücksichtigt; solange nicht zu hohe Geschwindigkeiten und nicht zu kleine Temperaturunterschiede auftreten, ist dies berechtigt. Alle Überlegungen für das Strömungsfeld gelten analog auch hier, insbesondere bildet sich in unmittelbarer Nähe fester Körper eine „Temperaturgrenzschicht“ aus, in welcher der gesamte Temperaturabfall zwischen Körper und umgebendem Medium stattfindet.<sup>6</sup> Ist das entsprechende Strömungsfeld bereits bekannt, so läßt sich für die längsange-strömte ebene Platte die Lösung von (7)<sup>7</sup> auf eine bloße Quadratur zurückführen, wie E. Pohlhausen<sup>8</sup> zeigte:

$$\Theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \frac{K(\xi)}{K(\infty)}; \quad K(\xi) = \int_0^\xi e^{-Pr_0 \int_\xi^{\xi'} f d\xi'} d\xi. \quad (8)$$

$T_0$  ist die Temperatur an der Wand,  $T_1$  am Außenrande der Grenzschicht;<sup>9</sup> die Randbedingungen:  $y = 0, T = T_0, y = \infty, T = T_1$  sind offenbar erfüllt.

Sind im Strömungsfeld Stoffe verschiedener Art mit örtlichen Unterschieden in ihrer Konzentration vorhanden, so tritt an Stelle von (7) eine ganz ähnlich gebaute Diffusionsgleichung, bei welcher an Stelle der Temperatur  $T$  die Konzentration  $c$  und an Stelle der Temperaturleitfähigkeit  $a = \frac{\lambda}{\varrho c_p}$  die Diffusionszahl  $k$  tritt.

Bei Anwendung auf praktische Probleme des Wärmeüberganges und der Diffusion ergeben sich Schwierigkeiten dadurch, daß die bei unseren bisherigen Betrachtungen vorausgesetzte Konstanz der Stoffwerte sehr häufig nicht zutrifft, denn die meisten Stoffwerte hängen von der Temperatur ab und dann sind Strömungs- und Temperaturfeld voneinander nicht mehr unabhängig. Eine ähnliche Schwierigkeit tritt auf dem Gebiet der Wärmeübertragung auf: Für konstante Stoffwerte lassen sich auf Grund

<sup>3</sup> H. Blasius: Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Z. Math. Physik 56, 1 (1908).

<sup>4</sup> W. Tollmien in Wien-Harms: Handbuch der Experimentalphysik. Bd. IV, 1. Teil. 1931.

<sup>5</sup> S. Goldstein: Modern Developments in Fluid Dynamics, 2 Bde. Oxford. 1938.

<sup>6</sup> Man kann daher wiederum  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  gegen  $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$  vernachlässigen; ferner beschränken wir uns auf stationäre Temperaturfelder ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ).

<sup>7</sup> Mit den erwähnten Vernachlässigungen.

<sup>8</sup> E. Pohlhausen: Der Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und kleiner Wärmeleitung. Z. angew. Math. Mechan. 1, 115 (1921).

<sup>9</sup> Pr ist die Prandtlsche Zahl  $\frac{v}{a}$  und  $f$  durch (5) definiert.

der Ähnlichkeitsbetrachtungen die Ergebnisse von Wärmeübergangsmessungen auf die Form bringen:

$$Nu = F \left( Re, Pr, \frac{l_1}{d}, \frac{l_2}{d}, \dots \right). \quad (9)$$

$Nu$  ist die dimensionslose Wärmeübergangszahl  $\frac{\alpha d}{\lambda}$ ,  $\frac{l_1}{d}$ ,  $\frac{l_2}{d}$  usw. sind die geometrischen Ähnlichkeitsverhältnisse festlegenden Proportionen und  $d$  eine charakteristische Länge des Problems. Es erhebt sich die Frage, ob die Veränderlichkeit der Stoffwerte nicht dadurch berücksichtigt werden kann, daß man in (9) die Stoffwerte bei einer passend gewählten Temperatur einsetzt, so daß sich alle Messungen wiederum einheitlich durch (9) darstellen lassen.

Bei Diffusionsproblemen kann die Dichte von der Konzentration abhängen, wenn es sich um höhere Konzentrationen und Stoffe verschiedener Dichte handelt; dies entspricht veränderlichen Stoffwerten bei Temperaturproblemen. Es kann aber auch etwas Neues auftreten: bei stärkeren Konzentrationen verschwindet die Quergeschwindigkeit  $v(0)$  an der Wand nicht mehr, worauf bereits Nusselt<sup>10</sup> hingewiesen hat. Wenn Flüssigkeit von einer benetzten Wand dadurch verdunstet, daß ein Gas entlang dieser Wand strömt, so gelangt ständig Substanz in das Strömungsfeld und man erhält daher  $v(0) > 0$ . Kondensiert Dampf an einer Wand oder wird ein Gas an derselben durch eine chemische Reaktion gebunden (z. B. ammonikhaltige Luft über mit Salzsäure getränktes Fließpapier), so ist  $v(0) < 0$ .

Über laminare Grenzschichtströmungen an der längsangeströmten ebenen Platte mit veränderlichen Stoffwerten liegen bisher zwei Arbeiten von L. Crocco<sup>11</sup> und von v. Kármán und Tsien<sup>12</sup> vor. In beiden Arbeiten werden die Differentialgleichungen durch Übergang zu neuen Veränderlichen in eine von der bei sonst üblichen Grenzschichtrechnungen abweichende Form gebracht. Crocco erhält zwei simultane Differentialgleichungen zweiter Ordnung und löst diese für ein Gas mit der Prandtl-Zahl 0·725 (Luft). v. Kármán und Tsien behandeln den speziellen Fall  $Pr = 1$  und haben nur eine Differentialgleichung zu lösen, da dann das Temperaturfeld in einfacher Beziehung zum Geschwindigkeitsfeld steht.

In der vorliegenden Arbeit wird zunächst eine im Schrifttum wenig beachtete Lösungsmethode für die Strömung an der ebenen Platte bei konstanten Stoffwerten in Erinnerung gebracht, die von Piercy und Preston<sup>13</sup> vorgeschlagen wurde und die von E. Pohlhausen mitgeteilte Formel (8) benutzt. Weiter wird gezeigt, wie man mit Hilfe dieser Methode auf übersichtliche und verhältnismäßig einfache Art die Grenzschichtströmung an der ebenen Platte bei veränderlichen Stoffwerten berechnen und bei Diffusionsproblemen auch die endliche Quergeschwindigkeit an der Wand berücksichtigen kann.

Wir beschränken uns hier auf laminare Grenzschichten, da der entsprechende turbulente Fall einer rechnerischen Behandlung bedeutend schwerer zugänglich ist. Laminare Grenzschichten treten an umströmten Körpern in der Nähe des Staupunktes auf und erstrecken sich von hier aus über einen um so größeren Bereich des Körpers, je kleiner die Reynoldssche Zahl ist, vorausgesetzt, daß keine Ablösung der Strömung vom Körper eintritt. Derartige Verhältnisse treten besonders bei Strömung zäher

<sup>10</sup> W. Nusselt: Wärmeübergang, Diffusion und Verdunstung. Z. angew. Math. Mechan. **10**, 105 (1930).

<sup>11</sup> L. Crocco: Sullo strato limite laminare nei gas lungo una parete piana. Rend. Circ. Math. Palermo **63** (1940/41).

<sup>12</sup> Th. v. Kármán and H. S. Tsien: Boundary Layer in Compressible Fluids. J. aeronaut. Sci. **5**, No. 6, 227 (1938).

<sup>13</sup> N. A. V. Piercy and J. H. Preston: A Simple Solution of the Flat Plate Problem of Skin Friction and Heat Transfer. Philos. Mag. J. Sci. (7), **21**, 995 (1936).

Flüssigkeiten auf, ferner dort, wo es sich um sehr kleine umströmte Körper handelt (z. B. die Teilchen bei Kohlenstaubfeuerung) und bei Diffusionsproblemen, wo oft nur kleine Geschwindigkeiten auftreten. In erster Linie werden in dieser Arbeit grundsätzliche Aufschlüsse angestrebt, während praktische Anwendungen eventuell einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.

## II. Lösung der Grenzschichtgleichung für veränderliche Stoffwerte.

Die Grenzschichtgleichungen für Geschwindigkeits- und Temperaturfeld an der ebenen Platte lauten unter Berücksichtigung veränderlicher Stoffwerte:<sup>8</sup>

$$\varrho u \frac{\partial u}{\partial x} + \varrho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (10)$$

$$\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} = 0, \quad (10a)$$

$$\varrho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} + \varrho c_p v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (11)$$

Die Bezeichnungen sind dieselben wie in (1), (2) und (7); zunächst wird wiederum von der Reibungswärme abgesehen.

Bei konstanten Stoffwerten lassen sich (10) und (11) auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zurückführen [s. Einleitung und Gl. (3) bis (6)] unter der Annahme, daß  $u$  und  $T$  eine Funktion lediglich der einen (dimensionslosen) Koordinate  $\xi = \frac{y}{2} \sqrt{\frac{U}{v_x}}$  sind. Da die Stoffwerte nur von der Temperatur abhängen, ist der Gedanke nahe liegend, daß dieselbe Vereinfachung auch bei veränderlichen Stoffwerten möglich ist. Wir setzen

$$\frac{u}{U} = \omega(\xi), \quad \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \Theta(\xi), \quad \xi = \frac{y}{2} \sqrt{\frac{U}{v_k x}}, \quad (12)$$

wobei  $U$  die Geschwindigkeit am Rande der Grenzschicht,  $T_0$  und  $T_1$  die Wandtemperatur bzw. die Temperatur am Außenrande der Grenzschicht ist. Die Größe  $v_k$  in der Dimensionslosen  $\xi$  bedeutet die kinematische Zähigkeit bei der festen Temperatur  $T_k$ , für die zweckmäßigerweise die Wandtemperatur ( $k = 0$ ) oder die Temperatur am Außenrande der Grenzschicht ( $k = 1$ ) gewählt wird. Die Randbedingungen für Strömungs- und Temperaturfeld lauten:

$$\begin{cases} y = 0, & \xi = 0, & \omega = 0, & \Theta = 0, \\ y = \infty, & \xi = \infty, & \omega = 1, & \Theta = 1. \end{cases} \quad (13)$$

Wir setzen ferner, wobei der Index  $k$  den Stoffwert bei der Temperatur  $T_k$  bezeichnet:

$$\frac{\varrho}{\varrho_k} = \sigma(\xi), \quad \frac{\mu}{\mu_k} = \varphi(\xi), \quad \frac{\lambda}{\lambda_k} = \chi(\xi). \quad (14)$$

Die spezifische Wärme  $c_p$  wird als konstant angesehen, was für die meisten Gase und Flüssigkeiten zutrifft. Zunächst erhält man aus (10a)

$$\varrho v = \sqrt{\frac{v_k}{U x}} \left( \varrho u \xi - \int_0^\xi \varrho u d\xi \right); \quad (15)$$

damit ergibt sich aus (10) durch Einführung von (14) und (15) in einer für die weitere Rechnung zweckmäßigen Form:

$$\frac{d}{d\xi} \left( \varphi \frac{d\omega}{d\xi} \right) = - \left( \varphi \frac{d\omega}{d\xi} \right) \frac{f}{\varphi}; \quad f = 2 \int_0^\xi \sigma \omega d\xi. \quad (16)$$

Aus (16) läßt sich folgender Ausdruck für  $\omega$  ableiten, wenn (16) als Differential-

gleichung für die Größe  $\varphi \frac{d\omega}{d\xi}$  und ferner  $f$  vorübergehend als eine bekannte Funktion von  $\xi$  angesehen wird:

$$\omega = \frac{J(\xi)}{J(\infty)}; \quad J(\xi) = \int_0^\xi \frac{1}{\varphi} e^{-\int_0^{\xi'} \frac{f}{\varphi} d\xi'} d\xi. \quad (17)$$

Dabei ist über die Integrationskonstante bereits unter Beachtung der Randbedingung (13) verfügt. Ebenso erhält man für die dimensionslose Temperatur  $\Theta$  den Ausdruck

$$\Theta = \frac{K(\xi)}{K(\infty)}; \quad K(\xi) = \int_0^\xi \frac{1}{\chi} e^{-Pr_k \int_0^{\xi'} \frac{f}{\chi} d\xi'} d\xi, \quad (18)$$

wobei  $Pr_k = \frac{\nu_k}{a_k} = \frac{\mu_k c_{pk}}{\lambda_k}$  die Pr-Zahl mit den Stoffwerten bei der Temperatur  $T_k$  ist.

Für konstante Stoffwerte ( $\varphi = \sigma = \chi = 1$ ) sind Geschwindigkeits- und Temperaturfeld voneinander unabhängig und wir erhalten aus (18) die bei E. Pohlhausen<sup>8</sup> angegebene Lösung für das Temperaturfeld [s. Gl. (8)], welche für  $Pr = 1$  ( $\nu = a$ ) eine Integralgleichung für das Geschwindigkeitsfeld darstellt, wie sich durch Vergleich von (17) und (18) ergibt. Während bei bekanntem Geschwindigkeitsfeld die Lösung für das Temperaturfeld nach (8) oder (18) durch einfache Quadratur möglich ist, stößt die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes zunächst auf die Schwierigkeit, daß in (17) die noch unbekannte Geschwindigkeit auf der rechten Seite in dem Ausdruck für  $f$  vorkommt. Bei dem Lösungsverfahren von Piercy und Preston geht man von einer beliebigen Näherung für  $\omega$  aus und berechnet mit dieser  $f$  nach (16) und damit  $J(\xi)$  nach (17), wobei wir uns daran erinnern, daß konstante Stoffwerte vorausgesetzt sind, also  $\varphi = \sigma = \chi = 1$  ist. Man erhält so einen verbesserten Wert von  $\omega$ , welcher Ausgangspunkt für einen neuen Rechenschritt ist usw. In Abb. 1 sind die einzelnen Schritte dieses Näherungsverfahrens eingezeichnet. Als Ausgangslösung  $\omega^{(0)}$  wurde die absichtlich rohe Näherung  $\omega = 1$  über die ganze Grenzschicht gewählt; die zugehörige erste Näherung  $\omega^{(1)}$  ist durch das Fehlerintegral gegeben. Schon nach der dritten Näherung zeigte die Schubspannung an der Wand nur mehr 4·5% Abweichung vom exakten Wert. Statt den Prozeß mechanisch fortzusetzen, wurde die zu erwartende endgültige Lösung aus dem Verlauf der bisher berechneten Näherungen abgeschätzt und als Grundlage für den folgenden Näherungsschritt benutzt; damit ergab sich die Lösung  $\omega$  mit nur mehr 1/2% Fehler in der Schubspannung.

Bei diesem Lösungsverfahren läßt sich die Verbesserung, welche durch jeden Näherungsschritt erzielt wird, größtenteils abschätzen: Die Gl. (17) und (18) sind für konstante Stoffwerte und  $Pr = 1$  identisch. Wir nehmen an, wir hätten eine Näherungslösung  $\omega^{(1)}$  derart, daß die zugehörige  $\xi$ -Koordinate sich um einen konstanten Faktor  $\alpha$  von der  $\xi$ -Koordinate der exakten Lösung  $\omega$  unterscheidet; dann ist offenbar auch  $(f)^{(1)} = \alpha f$  und aus einem Vergleich von (17) und (18) ergibt sich, daß der Einfluß des Faktors  $\alpha$  ebenso groß wie der der Größe  $Pr$  beim Temperaturfeld ist. E. Pohlhausen<sup>8</sup> hat auf Grund seiner numerischen Rechnungen gefunden, daß die Wärmeübergangszahl proportional  $\sqrt[3]{Pr}$  ist; mithin ist die Schubspannung an der Wand

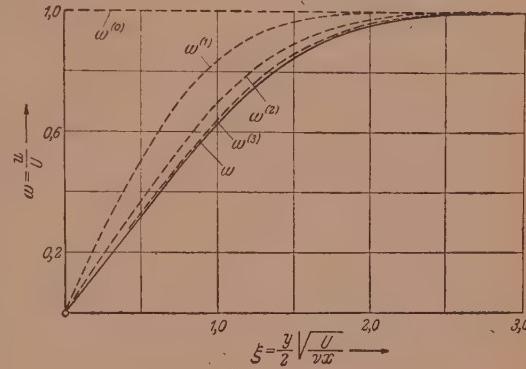


Abb. 1. Die einzelnen Näherungen bei Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung an der ebenen Platte nach der Methode von Preston und Piercy (konstante Stoffwerte).

bei der eben erwähnten Methode bei jedem Schritt nur mit ungefähr ein Drittel des Fehlers des vorhergehenden behaftet.

Bei veränderlichen Stoffwerten lassen sich die eben erläuterten Lösungsschritte „mathematischer Art“ mit folgenden Schritten „physikalischer Art“ vereinen:

1. Schritt: Als Ausgangspunkt werden die bekannten Lösungen für konstante Stoffwerte angenommen.

a) Für das Geschwindigkeitsprofil die Lösung von Blasius.<sup>3</sup>

b) Für das Temperaturfeld die Lösung von E. Pohlhausen.<sup>8</sup>

2. Schritt: a) Berechnung des Geschwindigkeitsprofils nach (17), wobei der Temperaturveränderlichkeit der Stoffwerte das Temperaturprofil nach Schritt 1 b zugrundegelegt ist.

b) Berechnung des Temperaturfeldes nach (18) mit dem Geschwindigkeitsprofil nach Schritt 2 a; Abhängigkeit der Stoffwerte von der Temperatur wie in Schritt 2 a.

Das Verfahren wird wiederholt, bis die endgültige Lösung hinreichend genau erreicht ist, wozu im allgemeinen drei bis vier Schritte genügen.

Zunächst einige allgemeine Ausführungen bezüglich des Einflusses der Temperaturveränderlichkeit der Stoffwerte: Vom Strömungs- oder Temperaturfeld interessieren hauptsächlich einzelne Werte, wie z. B. der Geschwindigkeitsgradient an der Wand (zur Berechnung der Wandschubspannung) oder die Wärmeübergangszahl; es ist naheliegend, der Temperaturveränderlichkeit der Stoffwerte dadurch Rechnung zu tragen, daß man in die „isothermen“ Formeln (d. h. die Formeln für konstante Stoffwerte) die Stoffwerte bei einer passend gewählten Temperatur einsetzt. Wählen wir die Temperatur an einem von beiden Rändern der Grenzschicht als Bezugstemperatur für die isotherme Strömung, so ergibt sich auf Grund physikalischer Anschauungen ebenso wie auf Grund der Formeln, daß innerhalb der Grenzschicht eine Zunahme der Zähigkeit oder der Dichte gegenüber den Randwerten eine Widerstandsvermehrung verglichen mit der isothermen Strömung zur Folge hat; ähnlich bewirkt eine Zunahme der Wärmeleitfähigkeit und der Dichte eine erhöhte Wärmeabgabe. Wie groß aber der Einfluß der Veränderlichkeit der einzelnen Stoffwerte ist, hängt vom Verhältnis der Grenzschichtdicken des Temperatur- und Geschwindigkeitsfeldes ab.<sup>14</sup>

Es möge dies an folgendem Fall erläutert werden, der auch praktische Bedeutung besitzt: die Temperaturgrenzschicht wird als sehr klein gegenüber der Strömungsgrenzschicht angenommen, was bei großen Pr-Zahlen (zähe Flüssigkeiten) der Fall ist. Dann kann offenbar von der Änderung der Stoffwerte innerhalb der thermischen Grenzschicht für die Bestimmung der Schubspannung abgesehen werden und diese wird ebenso verlaufen, als ob sich die Temperatur am Außenrande der Grenzschicht bis an die Wand erstreckt. Dasselbe gilt auch für das Geschwindigkeitsprofil, jedoch mit Ausnahme des kleinen Gebietes innerhalb der thermischen Grenzschicht, wo sich das Geschwindigkeitsprofil der Zähigkeitsänderung entsprechend verformt. Für das Temperaturprofil ist aber gerade dieses Gebiet maßgebend. Für den Geschwindigkeitsgradienten an der Wand erhält man aus der Gleichheit der Schubspannung:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 = \frac{\mu_1}{\mu_0} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 \right]_{i1} \quad \text{für } \Pr \rightarrow \infty, \quad (19)$$

wobei der Index  $i1$  die „isotherme“ Strömung mit den Stoffwerten bei der Temperatur  $T_1$  bedeutet. Die Veränderlichkeit der Dichte ist in diesem Fall für das Strömungsfeld ohne Einfluß. Dies läßt sich auch mathematisch aus den Formeln (17) und (18) herleiten. Die Verhältnisse beim Temperaturfeld werden an Hand der beiden Beispiele im nächsten Abschnitt besprochen.

<sup>14</sup> Nach E. Pohlhausen ist das Verhältnis beider proportional  $\frac{1}{\sqrt[3]{\Pr}}$ .

### III. Strömungs- und Temperaturfeld bei zähen Flüssigkeiten.

Den Eigenschaften der Stoffwerte zäher Flüssigkeiten entsprechend, wurden Geschwindigkeits- und Temperaturfeld unter der Annahme berechnet, daß lediglich die Zähigkeit sich mit der Temperatur ändern soll, und zwar nach folgender Formel:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left( \frac{T_k + T_c}{T + T_c} \right)^b, \quad (20)$$

wo  $b$  und  $T_c$  Konstante sind, welche so gewählt werden, daß die Temperaturabhängigkeit möglichst gut wiedergegeben wird. Der Index  $k$  soll die Werte 0 oder 1 besitzen,

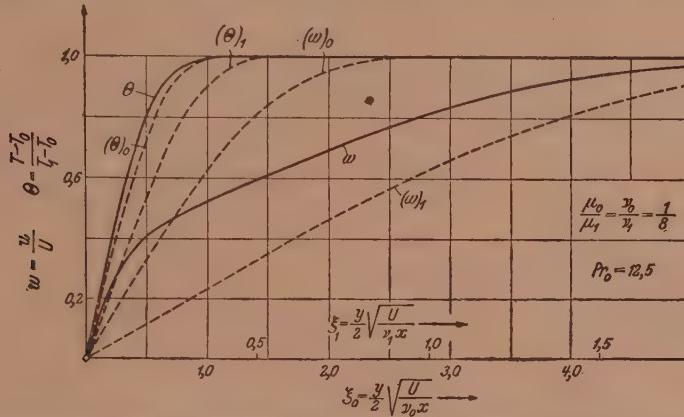


Abb. 2. Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung an einer beheizten Platte bei veränderlicher Zähigkeit. Zähigkeitsexponent  $b = 3$ .  $(\omega)_0$ ,  $(\Theta)_0$  bzw.  $(\omega)_1$ ,  $(\Theta)_1$  „isotherme“ Geschwindigkeits- und Temperaturverteilungen;  $\nu_0$  bzw.  $\nu_1$  kinematische Zähigkeit bei der Wandtemperatur  $T_0$  bzw. der Temperatur  $T_1$  am Außenrande der Grenzschicht.

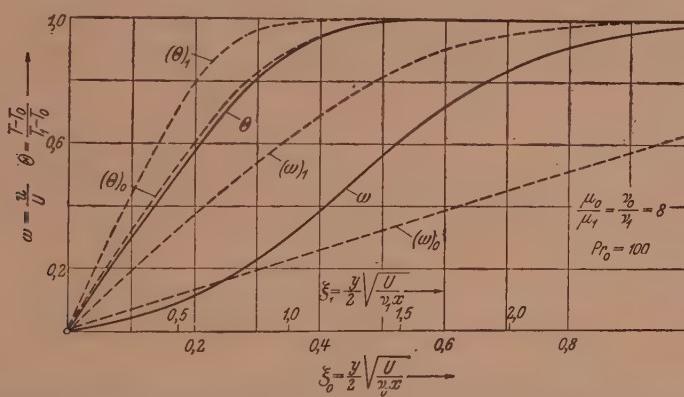


Abb. 3. Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung an der gekühlten Platte. Bezeichnungen nach Abb. 2.

je nach der Wahl der Stoffwerte in der Dimensionslosen  $\xi$ . Es wurde  $b = 3$  gewählt (z. B. zähes Schmieröl) und die beiden Fälle einer beheizten und gekühlten Platte mit  $\frac{\mu_0}{\mu_1} = \frac{1}{8}$  bzw. 8 und  $\text{Pr}_0 = 12.5$  bzw. 100 berechnet; es handelt sich also um zwei Beispiele mit derselben Flüssigkeit und gleich großen Temperaturdifferenzen, da in beiden Fällen  $\text{Pr}$  jeweils mit den Stoffwerten der Wandtemperatur gebildet ist. Wenn als Bezugstemperatur  $T_0$  gewählt wird, erhält man aus (20)

$$\varphi = \frac{\mu}{\mu_0} = \left( \frac{1}{\Theta \left( \sqrt[3]{\frac{\mu_0}{\mu_1}} - 1 \right) + 1} \right)^3. \quad (21)$$

Das Ergebnis der Rechnungen nach dem schrittweisen Verfahren des vorhergehenden Abschnittes ist aus Abb. 2 und 3 zu sehen. In beiden Abbildungen sind die dimensionslosen Wandabstände  $\xi_0$  und  $\xi_1$ , welche mit  $\mu_0$  und  $\mu_1$  gebildet sind, im Maßstab  $1:\sqrt{8}$  (Abb. 2) bzw.  $\sqrt{8}:1$  (Abb. 3) auf der Abszisse aufgetragen, so daß jedem Wandabstand  $y$  nur ein Punkt auf der Abszisse entspricht, gleichgültig, ob man diesen mittels der Bezeichnung für  $\xi_0$  oder  $\xi_1$  aufsucht. In beiden Abbildungen entspricht also die Lage der Kurven zueinander den wirklichen Verhältnissen. Neben der Lösung  $\omega$ , zu deren Berechnung drei Schritte nötig waren, sind noch die isothermen Geschwindigkeitsprofile  $(\omega)_0$  bzw.  $(\omega)_1$  bei konstanten Stoffwerten bei den Temperaturen  $T_0$  bzw.  $T_1$  über den dimensionslosen Koordinaten  $\xi_0$  bzw.  $\xi_1$  aufgetragen. Bei den „isothermen“ Temperaturprofilen  $(\Theta)_0$  und  $(\Theta)_1$  wurden auch die Pr-Zahlen bei den Temperaturen  $T_0$  bzw.  $T_1$  eingesetzt; z. B. ist in Abb. 2  $\text{Pr}_0 = 12 \cdot 5$  und  $\text{Pr}_1 = 100$ . In der folgenden Zusammenstellung bedeuten  $\tau_0$  und  $\alpha$  die Schubspannung an der Wand und die Wärmeübergangszahl  $\left[ \alpha = \lambda \left( \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)_0 \right]$ ;  $(\tau_0)_1$  und  $(\alpha)_0$  sind die entsprechenden Werte bei isothermer Strömung mit der Zähigkeit bei der Temperatur  $T_1$  bzw.  $T_0$ . Analoges gilt für  $(\tau_0)_0$  und  $(\alpha)_1$ .

Tab. 1.

	$\frac{\mu_0}{\mu_1}$	$\text{Pr}_0$	$\frac{\tau_0}{(\tau_0)_1}$	$\frac{\tau_0}{(\tau_0)_0}$	$\frac{\alpha}{(\alpha)_0}$	$\frac{\alpha}{(\alpha)_1}$	$\left( \frac{d\omega}{d\xi_0} \right)_0$	$\left( \frac{d\Theta}{d\xi_0} \right)_0$
Beheizte Wand .	0·125	12·5	0·841	2·38	1·20	1·70	1·58	1·84
Gekühlte Wand.	8·000	100·0	1·08	0·382	0·98	0·694	0·255	3·01

Obwohl in diesen Fällen die thermische Grenzschichtdicke keineswegs sehr klein gegenüber der Strömungsgrenzschicht ist, kann die Schubspannung doch gut durch die isotherme Formel mit der Zähigkeit bei der Temperatur  $T_1$  berechnet werden;<sup>15</sup> die Voraussetzungen zu Gl. (19) sind also für  $\text{Pr} > 10$  gegeben.

Verwickelter liegen die Verhältnisse bei der Wärmeübergangszahl; aus (8) folgt, daß die Wärmeübergangszahl  $\alpha \propto \text{prop. } g(\text{Pr}) \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$ , wobei nach E. Pohlhausen<sup>8</sup>  $g = 0·664 \sqrt[3]{\text{Pr}}$  mit großer Genauigkeit gilt. Unter Beachtung von  $\text{Pr} = \frac{\nu}{a}$  folgt, daß die Wärmeübergangszahl umgekehrt proportional der 6. Wurzel aus der Zähigkeit ist. Also erhält man für das Verhältnis der Wärmeübergangszahlen  $(\alpha)_0$  und  $(\alpha)_1$ :

$$\frac{(\alpha)_0}{(\alpha)_1} = \left( \frac{\mu_1}{\mu_0} \right)^{\frac{1}{6}}. \quad (22)$$

Einen weiteren Anhaltspunkt für die Wärmeübergangszahl liefert der Geschwindigkeitsgradient an der Wand; aus der Formel (19) und unter Beachtung von (12) folgt, wenn die Indizes an der eckigen Klammer  $i0$  bzw.  $i1$  isotherme Strömung bei der Temperatur  $T_0$  bzw.  $T_1$  bedeuten:

$$\frac{\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_0}{\left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 \right]_{i1}} = \frac{\mu_1}{\mu_0}; \quad \frac{\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_0}{\left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 \right]_{i0}} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_0}}; \quad (23)$$

auch diese Beziehungen finden sich in den Abb. 2 und 3 bestätigt.

Für die Wärmeübergangszahl  $\alpha$  lassen sich offenbar mit diesen Formeln Grenzen angeben (s. auch Abb. 2 und 3), die in Vielfachen der Wärmeübergangszahl  $(\alpha)_0$

<sup>15</sup> S. die Spalte  $\frac{\tau_0}{(\tau_0)_1}$  in Tab. 1 und vergleiche sie mit der Spalte für  $\frac{\tau_0}{(\tau_0)_0}$ .

ausgedrückt werden sollen. Die eine ist durch  $(\alpha)_1 = \sqrt[6]{\frac{\mu_0}{\mu_1}} (\alpha)_0$  [nach Gl. (22)] gegeben, denn das Geschwindigkeitsprofil  $(\omega)_1$  ergibt an allen Stellen höhere Geschwindigkeiten bei gekühlter und tiefere Geschwindigkeiten bei beheizter Wand. Die andere Grenze ist durch ein Geschwindigkeitsprofil von isothermer Form gegeben, bei welcher der Abszissenmaßstab durch einen Faktor  $\zeta$  so geändert wird, daß sein Gradient an der Wand mit dem der tatsächlichen Geschwindigkeitsverteilung übereinstimmt; da die oben erwähnte Grenze für die Wärmeübergangszahl durch einen Faktor mal  $(\alpha)_0$  ausgedrückt werden soll, so ist  $\zeta$  aus dem Verhältnis des wahren Geschwindigkeitsgradienten zu dem bei der Temperatur  $T_0$  zu berechnen [zweiter Teil der Gl. (23)]. Aus der Bemerkung über die Konvergenz des Lösungsverfahrens in Abschnitt II folgt dann, daß die Wärmeübergangszahl proportional  $\sqrt[3]{\zeta}$  ist und wir erhalten für den Grenzwert  $\sqrt[6]{\frac{\mu_1}{\mu_0}} (\alpha)_0$ . Zusammengefaßt erhält man für die Grenzen der Wärmeübergangszahl, wenn sich lediglich die Zähigkeit ändert:

$$\sqrt[6]{\frac{\mu_0}{\mu_1}} (\alpha)_0 \leq \alpha \leq \sqrt[6]{\frac{\mu_1}{\mu_0}} (\alpha)_0, \quad (24)$$

wobei die oberen Zeichen für beheizte, die unteren für gekühlte Wand gelten. Somit kommt in Übereinstimmung mit den speziellen Beispielen in Tab. 1 die Wärmeübergangszahl  $(\alpha)_0$  der wahren Wärmeübergangszahl  $\alpha$  am nächsten.

Näherungsweise ergibt sich also für zähe Flüssigkeiten ( $Pr > 10$ ), für die in erster Linie die Veränderlichkeit der Zähigkeit zu berücksichtigen ist, folgende Regel: Die Stoffwerte sind bei Berechnung des Widerstandes auf die Temperatur am Außenrande der Grenzschicht, beim Wärmeübergang auf die Wandtemperatur zu beziehen.

#### IV. Strömungs- und Temperaturfeld für $Pr = 0.7$ (Luft) bei Temperaturveränderlichkeit sämtlicher Stoffwerte.

Im Temperaturbereich —  $50^\circ$  bis  $140^\circ$  C lassen sich die Stoffwerte der Luft durch folgende Formeln darstellen:

$$\mu = K_1 T^{0.780}, \quad \varrho = K_2 T^{-1}, \quad \lambda = K_3 T^{0.821},$$

wobei  $T$  die Temperatur in absoluten Graden ist. Mit

$$\vartheta = \frac{T_0 - T_1}{T_1}$$

erhält man

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \varphi = [1 + \vartheta (1 - \varTheta)]^{0.78}$$

und ähnliche Ausdrücke für  $\sigma$  und  $\chi$ .

Die Rechnung nach der in Abschnitt II angegebenen Methode wurde für eine geheizte Platte und die Werte  $\vartheta = \frac{1}{4}$  und  $\frac{1}{2}$  durchgeführt und ergaben im Geschwindigkeits- und Temperaturfeld nur mäßige Abweichungen von der Form bei isothermer Strömung (Tab. 2). Zur Untersuchung der Verhältnisse bei höheren Temperaturunterschieden wurde der Fall  $T_1 = 20$  und  $T_0 = 620^\circ$  C gerechnet. Die Geschwindigkeits- und Temperaturfelder zeigen nach Abb. 4 bereits beträchtliche Abweichungen von der Form bei konstanten Stoffwerten.  $\xi_0$  bzw.  $\xi_1$  sind wieder mit den Stoffwerten bei den Temperaturen  $T_0$  bzw.  $T_1$  gebildet. Für beide Felder ergibt sich eine erhebliche Zunahme der Grenzschichtdicke; trotzdem zeigen Wandschubspannung und Wärmeübergangszahl nur geringe Abweichungen von den Werten für konstante Stoffwerte, wobei es gleichgültig ist, ob diese auf die Temperatur an der Wand oder am Außenrande der Grenzschicht bezogen wird. Dies erklärt sich

daraus, daß bei Luft innerhalb der Grenzschicht die Zunahme der Zähigkeit mit zunehmender Temperatur im Sinne einer Widerstandsvermehrung, die Abnahme der Dichte im Sinne einer Widerstandsverminderung wirken und sich beide Einflüsse bei  $\text{Pr} = 0.7$ , wo thermische und Strömungsgrenzschichtdicke ungefähr gleich groß sind, praktisch aufgeben. Fast ebenso liegen die Verhältnisse beim Temperaturfeld, weil die Wärmeleitfähigkeit eine ähnliche Abhängigkeit von der Temperatur besitzt wie die Zähigkeit.

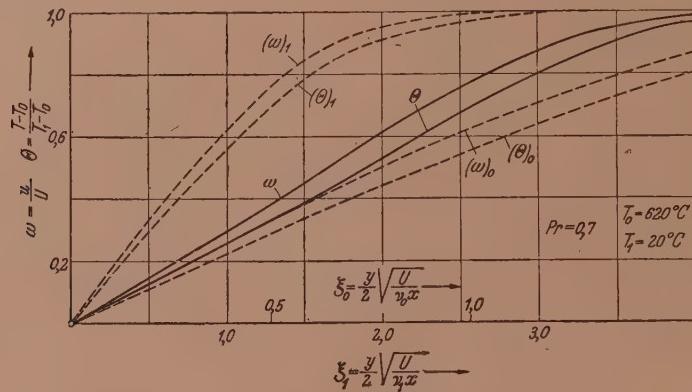


Abb. 4. Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung an einer beheizten Platte für  $\text{Pr} = 0.7$  (Luft); sämtliche Stoffwerte temperaturveränderlich.

Tab. 2.

Beheizung	$\frac{\tau_0}{(\tau_0)_1}$	$\frac{\tau_0}{(\tau_0)_0}$	$\frac{\alpha}{(\alpha)_1}$	$\frac{\alpha}{(\alpha)_0}$	$\left( \frac{d\theta}{d\xi_1} \right)_0$	$\left( \frac{d\omega}{d\xi_1} \right)_0$
$\vartheta = \frac{1}{4} \dots \dots$	1.00	1.02	1.00	1.01	0.486	0.556
$\vartheta = \frac{1}{2} \dots \dots$	1.00	1.05	1.00	1.02	0.420	0.485
$T_0 = 620^\circ \text{C} \dots \dots$	0.93	1.11	0.96	1.03	0.235	0.286
$T_1 = 20^\circ \text{C} \dots \dots$						

In ähnlicher Weise kann man die Reibungswärme berücksichtigen, in (11) tritt dann auf der rechten Seite ein Glied  $\mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$  hinzu und man erhält als Lösung:

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= \frac{1 + B(\infty)}{A(\infty)} A(\xi) - B(\xi), \\ A(\xi) &= \int_0^{\xi} \frac{1}{\chi} e^{-R(\xi)} d\xi, \\ B(\xi) &= 2 \frac{\text{Pr}_k \Delta T_e}{(T_1 - T_0)} \int_0^{\xi} \frac{1}{\chi} \left\{ \int_0^{\xi} \varphi \omega'^2 e^{-R(\xi)} d\xi \right\} e^{-R(\xi)} d\xi, \\ R(\xi) &= \text{Pr}_k \int_0^{\xi} \frac{f(\xi)}{\chi} d\xi; \quad \Delta T_e = \frac{U^2}{2 c_p}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Auch hier läßt sich das Iterationsverfahren durchführen, wenn auch die Rechenarbeit etwas größer ist. Für konstante Stoffwerte reduziert sich (25) auf die von E. Eckert<sup>16</sup> angegebene Lösung. Durch passende Änderung der Integrations-

<sup>16</sup> E. Eckert und O. Drewitz: Der Wärmeübergang an eine mit großer Geschwindigkeit längs angeströmte Platte. Festschr. Gebiete Ingenieurwes. 11, 116 (1940).

konstanten in (25) läßt sich auch das Thermometerproblem (verschwindender Temperaturgradient an der Wand) lösen.

Im Hinblick auf die von Crocco für ein Gas mit  $\text{Pr} = 0.725$  bereits durchgeführten Rechnungen wurde darauf verzichtet, nach der neuen Methode Zahlenbeispiele durchzurechnen.

### V. Anwendung auf ein Diffusionsproblem.

In derselben Weise wie das Temperaturfeld läßt sich beim Diffusionsproblem an der ebenen Platte auch das Konzentrationsfeld berechnen.<sup>17, 18</sup>. Die Differentialgleichung lautet:

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = k \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}, \quad (26)$$

wobei  $k$  die Diffusionszahl und  $c$  die Konzentration ist, welche als Menge des Gases bzw. Dampfes in der Volumeinheit definiert ist. Wir wollen hier die Stoffwerte als konstant ansehen, insbesondere annehmen, daß die Dichten der beiden gegeneinander diffundierenden Substanzen im ganzen Strömungsfeld annähernd gleich groß sind; dagegen soll berücksichtigt werden, daß bei stärkeren Konzentrationen die Geschwindigkeit  $v$  an der Wand nicht mehr verschwindet, worauf bereits Nusselt<sup>19</sup> hingewiesen hat. Wenn Flüssigkeit von einer Wand verdunstet, etwa dadurch, daß ein Gas, z. B. Luft, entlang einer benetzten Wand strömt, so gelangt ständig Substanz in die Strömung; man erhält daher an der Wand  $v(0) > 0$ . Wenn anderseits aus einem Dampf-Gas-Gemisch der Dampf an der Wand kondensiert, oder wenn z. B. ammoniakalische Luft über ein mit Salzsäure getränktes Fließpapier strömt, erhält man  $v(0) < 0$ . Die Randbedingung für  $v$  lautet nach den Gl. (100) und (101) nach Nusselt:<sup>19</sup>

$$-\frac{k}{c_0} \left( \frac{\partial c}{\partial y} \right)_0 \frac{1}{\frac{p}{p_0} - 1} = v(0), \quad (27)$$

wobei  $c$  die Konzentration des Gases bzw. Dampfes, für welchen die Wand durchlässig ist,  $c_0$  die entsprechende Konzentration an der Wand,  $p_0$  der zugehörige Partialdruck und  $p$  der gesamte Druck ist.

Für das Geschwindigkeitsprofil erhält man nun wegen  $v(0) \neq 0$  nicht mehr die Lösung von Blasius<sup>3</sup> (s. Abb. 1), sondern eine Schar von Profilen, je nach dem Wert von  $v(0)$ . Durch Einführung der Anströmgeschwindigkeit  $U$  und der Dimensionslosen  $\xi$  erhalten wir:

$$\left( \frac{v}{U} \right)_0 = -\frac{1}{2} \frac{k}{c_0} \frac{c_1 - c_0}{\left( \frac{p}{p_0} - 1 \right) U} \left( \frac{dC}{d\xi} \right)_0 \sqrt{\frac{U}{v x}}, \quad C = \frac{c - c_0}{c_1 - c_0}, \quad (28)$$

wobei  $c_0$  und  $c_1$  die Konzentrationen an der Wand und am Außenrande der Grenzschicht sind. Wir erhalten ähnlich (15):

$$\frac{v}{U} = \sqrt{\frac{v}{U x}} \left\{ \omega x - \int_0^\xi \omega d\xi + \frac{M}{2} \right\}, \quad M = -\frac{k}{v} \frac{c_1 - c_0}{c_0 \left( \frac{p}{p_0} - 1 \right)} \left( \frac{dC}{d\xi} \right)_0; \quad (29)$$

wir schreiben zunächst die Lösung für das Konzentrationsfeld an, welche analog (18) lautet:

<sup>17</sup> E. Eckert hat über eine Lösung dieses Problems auf der Tagung des VDI-Ausschusses für Wärmeforschung 1943 in Bayreuth berichtet, wobei ein Näherungsverfahren ähnlich der Methode von K. Pohlhausen für die Strömungsgrenzschicht zur Anwendung kam.

<sup>18</sup> Eine Abschätzung für das vorliegende Problem wurde von G. Damköhler: Z. Elektrochem. 178 (1942) gegeben.

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{L(\xi)}{L(\infty)}, & L(\xi) &= \int_0^\xi e^{-\frac{\nu}{k} \int_0^{\xi'} (f(\xi') - M) d\xi'} d\xi, \\ f(\xi) &= 2 \int_0^\xi \frac{u}{U} d\xi, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

wobei  $\frac{\nu}{k}$  eine der Pr-Zahl analoge Größe ist. Um die Geschwindigkeit  $\omega = \frac{u}{U}$  zu erhalten, brauchen wir nur in (30)  $\frac{\nu}{k} = 1$  zu setzen. Die Berechnung der Geschwindigkeiten

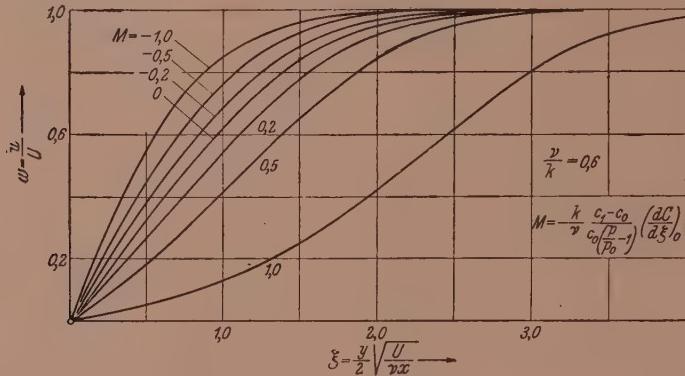


Abb. 5. Geschwindigkeitsfeld bei Diffusion mit höheren Konzentrationen, wobei endliche Quer-  
geschwindigkeiten an der Wand auftreten [s. auch Text zu Gl. (26) bis (28)].

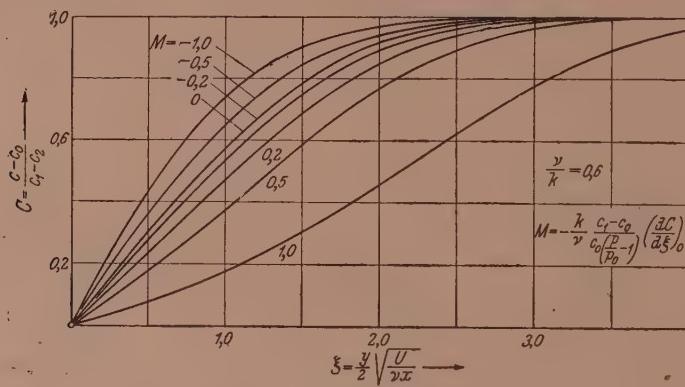


Abb. 6. Konzentrationsverteilung zu Abb. 5.

digkeits- und Konzentrationsfelder erfolgt durch ein Iterationsverfahren ähnlich dem in Kapitel II.

In  $M$  steckt der Konzentrationsgradient an der Wand; man kann jedoch (30) zunächst für beliebige  $M$ -Werte lösen und mit Hilfe des aus der Lösung erhaltenen Wertes für  $\left( \frac{dc}{d\xi} \right)_0$  die Größe  $N = -\frac{k}{\nu} \frac{c_1 - c_0}{c_0 \left( \frac{p}{p_0} - 1 \right)}$  ausrechnen. Die Geschwin-

digkeits- und Konzentrationsfelder für die gerechneten  $M$ - bzw.  $N$ -Werte sind aus den Abb. 5 und 6, der Konzentrationsgradient an der Wand aus Abb. 7 ersichtlich.  $M > 0$  bedeutet Verdunstung von der Platte,  $M < 0$  Kondensation bzw. Absorption an der Platte; für die Größe  $\frac{\nu}{k}$  wurde der Wert 0,6 gewählt, welcher mit guter Näherung für die Diffusion von Wasserdampf und Ammoniak in Luft gilt.<sup>19</sup> Genau

<sup>19</sup> Nach Ten Bosch: Die Wärmeübertragung, S. 189 und 257. Berlin. 1936.

genommen, ist bei den vorausgesetzten höheren Konzentrationen die Dichte und Zähigkeit des Gemisches der beiden Stoffe von der Konzentration und die Diffusionszahl von der Temperatur abhängig. Mit Hilfe der geschilderten Methode können auch derartige Fälle berechnet werden. Findet neben der Diffusion auch noch ein Wärmeübergang statt, so kann die Lösung für das Konzentrationsfeld mit guter Näherung auch auf das Temperaturfeld angewandt werden. Ebenso lässt sich aus der Lösung für das Konzentrationsfeld auch auf den Wärmeübergang schließen, wenn an der Platte Luft, z. B. durch eine poröse Wand, ausgeblasen oder abgesaugt wird mit Quergeschwindigkeiten an der Wand entsprechend Gl. (28).

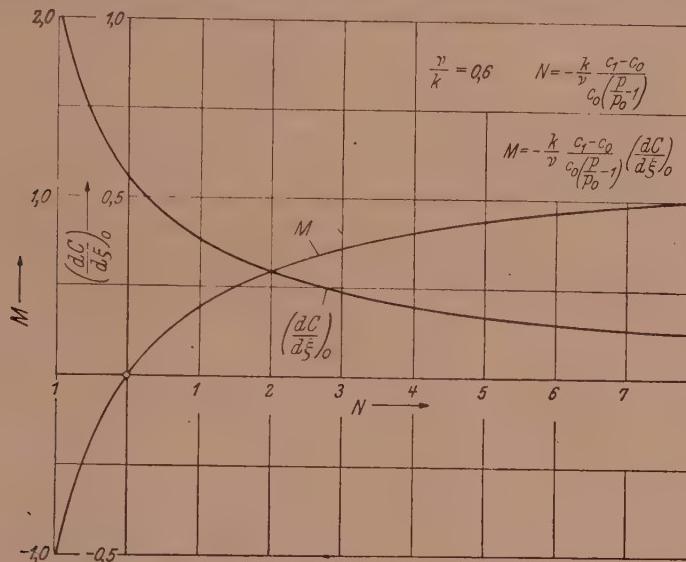


Abb. 7. Konzentrationsgradient an der Wand und Größe  $M$  in Abhängigkeit von  $N$  (zu Abb. 6).

## VI. Zusammenfassung.

In Anlehnung an die Lösung von E. Pohlhausen für das laminare Temperaturfeld an der längsangeströmten ebenen Platte werden Formeln angegeben, welche es gestatten, mit Hilfe einer Integralgleichung und eines auf dieser fußenden Iterationsverfahrens Geschwindigkeits- und Temperaturfeld für veränderliche Stoffwerte zu berechnen. Es wurden damit folgende Fälle gelöst: Unter der Annahme, daß sich lediglich die Zähigkeit mit der Temperatur ändert und die übrigen Stoffwerte konstant bleiben, wurden für die Pr-Zahl 12·5 und 100 (zähe Flüssigkeiten) bei beheizter bzw. gekühlter Platte Geschwindigkeits- und Temperaturfeld berechnet. Eine nähere Untersuchung dieser beiden Fälle ergab allgemeine Gesetzmäßigkeiten. Für ein Gas der Pr-Zahl 0·7 (Luft) wurden die Rechnungen unter der Annahme durchgeführt, daß sich sämtliche Stoffwerte mit der Temperatur ändern und die Geschwindigkeiten nicht zu groß sind, so daß von der Reibungswärme abgesehen werden kann. Es ergab sich eine Verdickung der Grenzschichten, jedoch ohne wesentliche Änderung in der Schubspannung und Wärmeübergangszahl gegenüber den Werten, die mit den Formeln für konstante Stoffwerte berechnet wurden. Es haben nämlich die Einflüsse von Dichte und Zähigkeit bzw. Dichte und Wärmeleitfähigkeit bei Geschwindigkeits- und Temperaturfeld in bezug auf Wandschubspannung und Wärmeübergangszahl entgegengesetzte Wirkung und heben sich nahezu auf. Formeln, welche auch die durch Reibung erzeugte Wärmemenge berücksichtigen, wurden angegeben, aber von der Durchführung der dazugehörigen Rechnungen in Hinblick auf die bereits

vorliegenden Ergebnisse der Arbeit von Crocco abgesehen. Die hier entwickelten Lösungsmethoden wurden schließlich auch auf den Fall der Diffusion von Beimengungen angewandt, wo bei stärkeren Konzentrationen endliche Quergeschwindigkeiten an der Wand auftreten, wodurch sich Geschwindigkeits- und Temperaturfeld erheblich ändern.

(Eingegangen am 3. Dezember 1946.)

## Die Druckausbreitung in einer Halbscheibe bei mit der Tiefe abnehmendem Elastizitätsmodul.

Von H. Borowicka, Linz.

Mit 2 Textabbildungen.

Bei der Berechnung der Setzungen von Bauwerken geht man im allgemeinen von der Spannungsverteilung im elastisch-isotropen Halbraum aus. Die Tatsache, daß der Elastizitätsmodul in der Natur sehr selten konstant ist, läßt es naheliegend erscheinen, die Spannungsverteilung im Halbraum bzw. in der Halbscheibe auch für nicht konstante Elastizitätsmodulen zu untersuchen.

Zunächst ist hier eine Arbeit von K. Wolf<sup>1</sup> zu nennen, in welcher er die Ausbreitung der Kraft im Halbraum bzw. in der Halbscheibe bei anisotropem Material untersucht, welches in horizontaler und vertikaler Richtung voneinander abweichende Elastizitätsmoduln besitzt. Einen weiteren Schritt tat O. K. Fröhlich,<sup>2</sup> welcher in seinem Buche „Druckverteilung im Baugrund“ für den Spannungszustand im Halbraum bei einem mit der Tiefe linear zunehmenden Elastizitätsmodul eine Lösung angibt. Der Verfasser<sup>3</sup> konnte nachweisen, daß die von O. K. Fröhlich auf Grund anderweitiger Überlegungen gefundene Funktion tatsächlich eine strenge Lösung für das angegebene Elastizitätsgesetz darstellt, allerdings mit der Einschränkung, daß sie nur bei einer Poisson-Zahl von  $m = 3$  gültig ist. Auch für den Sonderfall  $m = 2$  konnte vom Verfasser eine geschlossene, strenge Lösung angegeben werden. In beiden Fällen handelt es sich um einachsige (strahlige) Spannungszustände. Die einzige, nicht verschwindende Hauptspannung fällt in die Richtung des Fahrstrahles  $u$  und lautet ( $x$  Tiefe unter der Oberfläche des Halbraumes)

$$m = 2, \quad \sigma_u = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi} \frac{x}{u^2},$$

$$m = 3, \quad \sigma_u = \frac{2P}{\pi} \frac{x^2}{u^4}.$$

Für größere Poisson-Zahlen können die Spannungskomponenten als Summen unendlicher Reihen errechnet werden, wobei an dieser Stelle nur auf die bezügliche Veröffentlichung im Ingenieur-Archiv verwiesen wird.

Nun tritt aber auch öfters der umgekehrte Fall ein, daß nämlich der Elastizitätsmodul mit der Tiefe nicht zu-, sondern abnimmt. Beispielsweise brauchen wir nur an alle jene Fälle zu denken, wo die Oberfläche des Bodens künstlich verdichtet wurde. Ähnlich liegen die Verhältnisse bei der Oberflächenhärtung größerer Werkstücke.

Für eine elastische Halbscheibe läßt sich nun bei Gültigkeit des Elastizitätsgesetzes

$$E = \frac{\text{const.}}{x} \quad (1)$$

<sup>1</sup> K. Wolf: Ausbreitung der Kraft in der Halbebene und im Halbraum bei anisotropem Material. Z. angew. Math. Mechan. 15, 249 (1935).

<sup>2</sup> O. K. Fröhlich: Druckverteilung im Baugrund, S. 86. Wien. 1934.

<sup>3</sup> H. Borowicka: Die Druckausbreitung im Halbraum bei linear zunehmendem Elastizitätsmodul. Ingenieur-Arch. 14, 75 (1943).

eine besonders einfache Lösung angeben, weshalb dieser Fall hier untersucht werden soll. Aus Gl. (1) folgt ohne weiteres bei konstanter Poisson-Zahl  $m \left( E = \frac{2(m+1)}{m} G \right)$

$$G = \frac{e}{x}. \quad (2)$$

Für den ebenen Spannungszustand können die bekannten Zusammenhänge zwischen den Spannungskomponenten  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  und  $\tau$ , den Dehnungen  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  und  $\gamma$  sowie den Verzerrungskomponenten  $\xi$  und  $\eta$  unter Berücksichtigung der Gl. (2) angeschrieben werden (Abb. 1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} &= 0, & \dot{\varepsilon}_x &= \frac{\partial \xi}{\partial x}, & \varepsilon_x &= \frac{m}{2(m+1)} \frac{x}{e} \left( \sigma_x - \frac{1}{m} \sigma_y \right), \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0, & \varepsilon_y &= \frac{\partial \eta}{\partial y}, & \varepsilon_y &= \frac{m}{2(m+1)} \frac{x}{e} \left( \sigma_y - \frac{1}{m} \sigma_x \right), \\ \gamma &= \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}, & \gamma &= \frac{x}{e} \tau. \end{aligned}$$

Diese acht Gleichungen vermitteln den Zusammenhang zwischen den acht unbekannten Funktionen. Behält man nur die lotrechte Spannungskomponente  $\sigma_x$  bei, so ergibt sich unter Weglassung der Zwischenrechnung folgende einfache Differentialgleichung für  $\sigma_x$ :

$$\Delta \Delta \sigma_x + \frac{2}{x} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \sigma_x = 0. \quad (3)$$

#### a) Einzellast.

Für den Fall einer Einzellast wurde als Lösung der Differentialgleichung (3) folgende Funktion gefunden:

$$\sigma_x = K \frac{x}{u^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y}. \quad (4)$$

Durch Bildung der partiellen Differentialquotienten und durch Einsetzen dieser in die Differentialgleichung (3) überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit dieser Lösung. Die Konstante  $K$  ist aus der Bedingung zu bestimmen, daß die Summe aller  $\sigma_x$  in jedem Horizontalschnitt gleich der angreifenden Last  $P$  sein muß. Die anderen Spannungskomponenten werden aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmt. Somit erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{4P}{\pi^2 u^2} \frac{x}{u^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y}, \\ \sigma_y &= \frac{4P}{\pi^2} \frac{y^2}{x u^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y}, \\ \tau &= \frac{4P}{\pi^2} \frac{y}{u^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Aus den Gl. (5) erkennt man, daß für  $x = 0$  sowohl  $\sigma_x$  als auch  $\tau$  verschwinden, daß also am oberen Rand der Halbscheibe außer der Last  $P$  tatsächlich keine weiteren äußeren Kräfte angreifen. Weiters erkennt man aus den Gl. (5), daß es sich um einen einachsigen Spannungszustand handelt. Die nicht verschwindende Hauptspannung fällt in die Richtung des Fahrstrahles und hat die Größe

$$\sigma_u = \frac{4P}{\pi^2} \frac{1}{x} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y}. \quad (6)$$

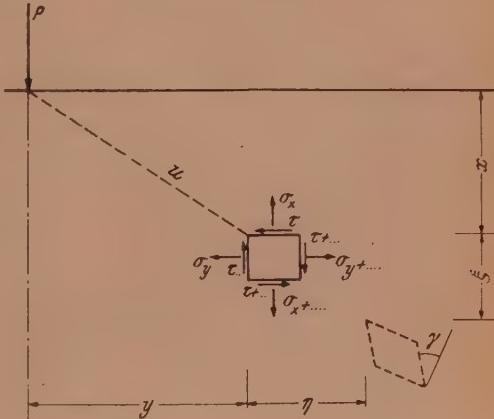


Abb. 1.

In der Lastachse ( $y = 0$ ) werden die Spannungen

$$\sigma_x = \frac{2 P}{\pi} \frac{1}{x}, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau = 0.$$

Für die Dehnung  $\varepsilon_x$  erhält man für  $y = 0$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left( \sigma_x - \frac{1}{m} \sigma_y \right) = \frac{m}{m+1} \frac{P}{\sigma \pi} = \text{const.}$$

### b) Gleichlast.

Für eine Gleichlast, welche auf der oberen Berandung der Halbscheibe über eine Strecke  $2b$  verteilt ist (Abb. 2), werden die Spannungskomponenten durch Integration

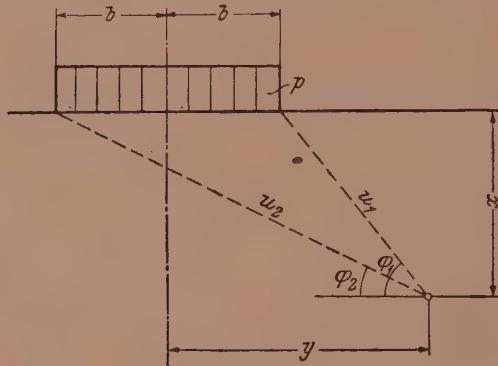


Abb. 2.

aus Fall a gewonnen. Man erhält, wenn die Veränderliche mit  $\eta$  bezeichnet wird:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{4 p}{\pi^2} \int_{-b}^{+b} \frac{x}{x^2 + (y-\eta)^2} \arctg \frac{x}{y-\eta} d\eta = \frac{2 p}{\pi^2} \left| \arctg^2 \frac{x}{y-\eta} \right|_{-b}^{+b} \\ &= \frac{2 p}{\pi^2} \left( \arctg^2 \frac{x}{y-b} - \arctg^2 \frac{x}{y+b} \right) = \frac{4 p}{\pi^2} \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} (\varphi_1 - \varphi_2), \\ \sigma_y &= \frac{4 p}{\pi^2} \int_{-b}^{+b} \left[ \frac{1}{x} \arctg \frac{x}{y-\eta} - \frac{x}{x^2 + (y-\eta)^2} \arctg \frac{x}{y-\eta} \right] d\eta \\ &= \frac{4 p}{\pi^2} \left| -\frac{y-\eta}{x} \arctg \frac{x}{y-\eta} - \frac{1}{2} \ln [x^2 + (y-\eta)^2] - \frac{1}{2} \arctg^2 \frac{x}{y-\eta} \right|_{-b}^{+b} \\ &= -\frac{4 p}{\pi^2} \left[ \frac{1}{2} \arctg^2 \frac{x}{y-b} - \frac{1}{2} \arctg^2 \frac{x}{y+b} + \frac{y-b}{x} \arctg \frac{x}{y-b} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{y+b}{x} \arctg \frac{x}{y+b} + \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + (y-b)^2}{x^2 + (y+b)^2} \right] \\ &= -\frac{4 p}{\pi^2} \left[ \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) + \varphi_1 \operatorname{ctg} \varphi_1 - \varphi_2 \operatorname{ctg} \varphi_2 + \ln \frac{u_1}{u_2} \right], \\ \tau &= \frac{4 p}{\pi^2} \int_{-b}^{+b} \frac{y-\eta}{x^2 + (y-\eta)^2} \arctg \frac{x}{y-\eta} d\eta = \frac{2 p}{\pi^2} \int_{-b}^{+b} \frac{y-\eta}{x} d \arctg^2 \frac{x}{y-\eta}. \end{aligned}$$

Mit der Substitution

$$\frac{x}{y-\eta} = \operatorname{tg} \varphi, \quad y = +b, \quad \varphi_1 = \arctg \frac{x}{y-b},$$

$$y = -b, \quad \varphi_2 = \arctg \frac{x}{y+b}$$

wird

$$\tau = \frac{4 p}{\pi^2} \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \varphi \operatorname{ctg} \varphi d\varphi = \frac{4 p}{\pi^2} [J(\varphi_1) - J(\varphi_2)],$$

worin  $J(\varphi)$  folgende Reihe bedeutet:

$$\begin{aligned} J(\varphi) &= \varphi - \frac{1}{9} \varphi^3 - \frac{1}{225} \varphi^5 - \frac{2}{6615} \varphi^7 - \frac{1}{42525} \varphi^9 - \frac{2}{1029105} \varphi^{11} - \dots + \\ &+ (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k+1)!} B_{2k} \varphi^{2k+1}. \end{aligned}$$

Hierin bedeuten  $B_{2k}$  die Bernoullischen Zahlen. Somit erhält man für die Spannungskomponenten:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{4 p}{\pi^2} \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} (\varphi_1 - \varphi_2), \\ \sigma_y &= -\frac{4 p}{\pi^2} \left[ \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) + \varphi_1 \operatorname{ctg} \varphi_1 - \varphi_2 \operatorname{ctg} \varphi_2 + \ln \frac{u_1}{u_2} \right], \\ \tau &= \frac{4 p}{\pi^2} [J(\varphi_1) - J(\varphi_2)], \\ J(\varphi) &= \varphi - \frac{1}{9} \varphi^3 - \frac{1}{225} \varphi^5 - \frac{2}{6615} \varphi^7 - \frac{1}{42525} \varphi^9 - \\ &- \frac{2}{1029105} \varphi^{11} - \dots + (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k+1)!} B_{2k} \varphi^{2k+1}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Zusammenfassung: Bei Belastung der oberen Berandung einer Halbscheibe durch eine Einzellast bzw. durch eine Gleichlast wird für das Elastizitätsgesetz  $E = \frac{\text{const.}}{x}$  eine einfache Lösung für den Spannungszustand in der Halbscheibe angegeben.

(Eingegangen am 20. Jänner 1947.)

## Ein neues Bild des metallischen Leitungsmechanismus.

Von K. M. Koch, Wien.

Mit 2 Textabbildungen.

Man wird auf wenig Widerspruch stoßen, wenn man behauptet, daß eine Theorie des Leitungsmechanismus in Metallen unbefriedigend ist, solange sie die eigenartige Erscheinung des Verschwindens des Ohmschen Widerstandes bei Temperaturen oberhalb des absoluten Nullpunktes — die Supraleitung — nicht zu erklären imstande ist. Unterzieht man aber die zahlreichen Versuche einer theoretischen Deutung dieses Phänomens einer kritischen Überprüfung, so zeigt es sich, daß eigentlich fast alle von der Tendenz ausgehen, die Theorie des normalen Leitungsvorganges durch Zusatzannahmen zu ergänzen, wobei es sich meistens sehr schwer entscheiden läßt, ob in diesen nicht verborgene Zirkelschlüsse stecken. Dagegen hat sich, von einigen im Qualitativen stecken gebliebenen Versuchen abgesehen, noch niemand die Mühe gemacht, die Grundvorstellungen der Elektronentheorie auf die Möglichkeit irgendwelcher Abänderungen hin zu untersuchen, die den Übergang zur Supraleitung dem gefühlsmäßigen Verständnis näherbringen könnten. Man hat wohl den auf diesem Wege liegenden Parallelismus zwischen dem Verhältnis: Para- = Ferromagnetismus auf der einen und Normal- = Supraleitung auf der anderen Seite gesehen, aber nicht den Mut gehabt, alle Konsequenzen aus ihm zu ziehen. Schuld daran war, daß man eine Theorie der Normalleitung vor sich hatte, die die Schwächen der ihr zugrunde liegenden Modellvorstellung durch eine überaus glückliche Wahl des mathematischen Apparats überbrückt. Erst eine genauere Untersuchung zeigt, daß zwischen den

Grundvorstellungen des Modells der sog. „Elektronengasttheorie“ und der mathematischen Durchführung ein gewisser Spielraum bleibt, der es ermöglicht, Ergänzungen und Änderungen am Modell vorzunehmen, ohne zunächst den mathematischen Teil der Theorie wesentlich ändern zu müssen. Dieser Spielraum bedingt anderseits, daß sich aus der rein formalen Auswertung der Theorie manchmal Effekte ergeben, deren physikalische Bedeutung nicht völlig klar ist. Es ergibt sich, daß die gleiche Modifikation der Modellvorstellung, die den Übergang zur Supraleitung ermöglicht, auch diese zweifelhaften Effekte ausschließt, indem sie die Geltung der theoretischen Ansätze einschränkt. Darüber soll an anderer Stelle berichtet werden. Für diesmal wollen wir uns darauf beschränken, zu zeigen, wie man in völliger Analogie zum Ferromagnetismus durch eine verhältnismäßig geringfügige Änderung des Modells Normal- und Supraleitung auf einen gemeinsamen Mechanismus zurückführen kann, wobei der Eintritt der Supraleitung aus einer universellen Tendenz des Gitters der Festkörper zu stufenweiser Steigerung ihres Ordnungszustandes abgeleitet werden kann. Um dies klarzumachen, muß zunächst das Grundsätzliche der Weißschen Theorie des Ferromagnetismus in Kürze in Erinnerung gebracht werden.

### 1. Die Weißsche Theorie des Ferromagnetismus.

Bekanntlich geht diese<sup>1</sup> von der Langevinschen Theorie des Paramagnetismus aus. Es wird angenommen, daß der para- oder ferromagnetische Körper, unabhängig vom Feld, Elementarmagnete (Bahnmomente, Spins) enthält, die durch das Feld lediglich parallel gestellt werden und daß im allgemeinen ein Widerstreit zwischen der orientierenden Wirkung des Feldes und der statistischen Unordnung der Wärmebewegung besteht. Dies führt dazu, daß die Zahl der parallel zum Feld orientierten Dipole eine Funktion des Verhältnisses  $\mu H/k T$  (= magnetische Energie des Dipoles vom Moment  $\mu$  im Feld zur atomaren Energie der Wärmebewegung) wird. Die Magnetisierung  $M$  des Makrokörpers als Produkt der Zahl der parallel orientierten Dipole mit ihrem Moment wird dann durch den Ausdruck

$$M = M_\infty \cdot L(\mu H/k T) \quad (1)$$

dargestellt, wobei  $M_\infty = n \mu$  die Magnetisierung bei Parallelstellung sämtlicher  $n$  Dipole des Volumens und  $L(\mu H/k T)$  die sog. Langevin-Funktion ist, deren analytischer Ausdruck von der Quantelung des Winkels zwischen Feld und Dipol abhängt. Ist  $\mu$  ein Spinnmoment, so wird angenommen, daß nur Parallel- oder Antiparallelstellung vorkommt, in diesem Fall wird  $L(x)$

$$L(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \tanh x.$$

Im ferromagnetischen Zustand soll nun nach Weiß das äußere Feld durch ein der Magnetisierung proportionales Glied, das sog. „innere“ Feld, ergänzt werden, also

$$M = M_\infty \cdot L\{\mu(H + \text{const.} \cdot M)/k T\}. \quad (2)$$

Es ist nun für das Folgende wesentlich, sich klarzumachen, wie aus diesem Ansatz der Begriff der „spontanen“ Magnetisierung folgt. Setzen wir

$$M/M_\infty = L(x); \quad x = \mu(H + \text{const.} M)/k T, \quad (3a)$$

somit

$$M/M_\infty = \frac{k T}{\mu c M_\infty} x - \frac{H}{c M_\infty}, \quad (3b)$$

so können wir die zu einer bestimmten Feldstärke und Temperatur gehörige Magnetisierung graphisch ermitteln (Abb. 1). Wir sehen dann unmittelbar aus der Abbildung,

<sup>1</sup> P. Weiß: Physik. Z. 9, 358 (1908).

daß auch für  $H = 0$  eine endliche Magnetisierung resultiert, wenn die Steigung der Geraden (3b) kleiner bleibt als die der Nullpunktstangente an  $L(x)$ , so daß also die Bedingung

$$\frac{k T}{\mu c M_\infty} = L'(x)_{x=0} \quad (4)$$

eine Temperatur definiert, oberhalb derer keine spontane Ausrichtung der Elementarmagnete mehr möglich ist (Curie-Punkt).

Der Nachweis, daß durch die Annahme einer spontanen Magnetisierung in Bereichen, die eine sehr große Anzahl von Atomen umfassen, das Verhalten der ferromagnetischen Stoffe in jeder Beziehung richtig beschrieben wird, gehört zu den umfangreichsten Kapiteln der Physik. Man vergleiche hierzu die Darstellung von R. Becker und W. Döring in dem Spezialwerk „Ferromagnetismus“ (J. Springer, Berlin 1939).

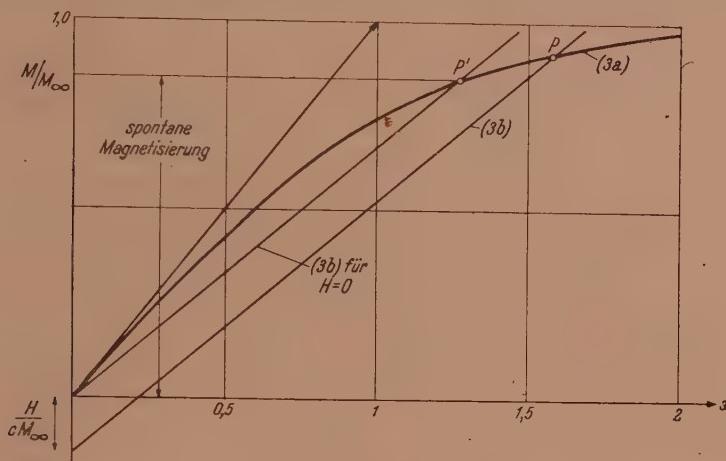


Abb. 1.

Fragt man aber, ob die spontane Magnetisierung auch in der Form in Erscheinung tritt, daß ein makroskopischer Versuchskörper, ohne einem äußeren Magnetfeld ausgesetzt worden zu sein, eine Magnetisierung aufweist, so ist diese Frage vorläufig zu verneinen. Nur an Versuchskörpern von mikroskopischen Dimensionen (Kügelchen, Filme) hat man in den letzten Jahren Meßergebnisse erzielt, die im Sinne einer spontanen Sättigungsmagnetisierung gedeutet werden könnten.<sup>2</sup>

Auf die interessante Frage nach der Natur des inneren Feldes, das in der Weißschen Theorie zunächst nur als der geniale Versuch eines formalen Ansatzes erscheint, der erst durch seine Konsequenzen gerechtfertigt wird, wollen wir hier nur ganz kurz eingehen. Es ist zweifellos, daß es sich um eine Erscheinung handelt, die der an manchen Legierungen als „Überstrukturbildung“ beobachteten analog ist, d. h. um das Auftreten einer Ordnungstendenz, die in beiden Fällen dadurch gekennzeichnet ist, daß der Arbeitsaufwand, der zur Zerstörung der Ordnung in atomaren Bereichen erforderlich ist, dem pauschalen Ordnungsgrad im Gesamtkristall proportional ist. Es soll dabei unerörtert bleiben, ob man diese Ordnungsenergie, wie die Mehrzahl der Autoren annimmt, aus der Wechselwirkung der nächsten Nachbarn oder aus einer atomistisch nicht mehr deutbaren Kollektivwirkung der Kristallstruktur ableiten soll. Vielleicht ist es überhaupt richtiger, auf jede Deutung zu verzichten und sich auf die Feststellung zu beschränken, daß das Gitter eines Kristalls die Tendenz hat, bei abnehmender Temperatur in unstetigen Stufen seinen Ordnungsgrad zu erhöhen,

<sup>2</sup> Charles Kittel: Phys. Rev. 70, 965 (1946).

wobei unter noch nicht völlig geklärten Umständen sozusagen jeder denkbare Freiheitsgrad des Atoms und der Atomelektronen zur Festlegung eines solchen Ordnungsgrades dienen kann. Man könnte auch vermuten, daß sich in diesen Erscheinungen eine Quantelung der Kristallenergie als Ganzes äußert, daß, anders gesagt, die mit steigender Temperatur abnehmenden Ordnungsgrade Anregungszustände des als Makromolekül zu betrachtenden Kristalls sind. Das würde letzten Endes bedeuten, daß wir neben den verschiedenen Energieniveaus der Atome und Moleküle noch solche des Kristalls als Ganzes annehmen müssen, die nicht mehr einfach aus der Superposition der atomaren Niveaus zu erklären sind. Darüber soll in einem anderen Zusammenhang eingehender gesprochen werden.

## 2. Die Hypothese der „Elementarströme“.

Ein erster Versuch, die Grundbegriffe der Weißschen Theorie des Ferromagnetismus auf das Problem der Supraleitung zu übertragen, wurde schon 1933 von J. Frenkel<sup>3</sup> unternommen. Frenkel ging davon aus, daß man die Bewegungen der Elektronen zwischen zwei Zusammenstößen als Elementarströme auffassen könne, denen der Größenordnung nach eine magnetische Wechselwirkungsenergie vom Betrag  $(i \cdot ds)^2/r$  zukommt. Auf Grund der Elektronentheorie ist  $i \cdot ds$  durch  $e v/c$  zu ersetzen, wobei  $v$  natürlich die thermische Geschwindigkeit, nicht die durch ein elektrisches Feld bedingte Triftgeschwindigkeit ist. Unter gewissen, nicht in allen Konsequenzen durchsichtigen Voraussetzungen könnte diese Wechselwirkung bei einer großen Zahl paralleler Elementarströme zu einem so großen zusätzlichen Impuls führen, daß eine Beeinflussung des einzelnen Elektrons durch die Gitterschwingungen nicht mehr möglich ist. Die Überlegungen Frenkels wurden durch Bethe und Fröhlich<sup>4</sup> einer ablehnenden Kritik unterzogen. In neuester Zeit hat W. Band<sup>5</sup> eine Ergänzung des Frenkelschen Gedankenganges versucht. Verwunderlicherweise hat Frenkel übersehen, daß die magnetische Wechselwirkung zwischen zwei benachbarten Elementarströmen sogar quantitativ in der Größenordnung liegt, die zur Deutung der Sprungtemperaturen der Supraleiter erforderlich wäre. Setzt man nämlich in dem Ausdruck  $(e v/c)^2/r$  für  $v$  die Grenzgeschwindigkeit der Fermi-Verteilung

$$v = \frac{\hbar}{m} \left( \frac{3 n}{8 \pi} \right)^{1/2},$$

für  $r$  die Gitterkonstante, so erhält man den Betrag von  $10^{-16}$  Erg, dem eine thermische Energie ( $k T$ ) von rund  $1^\circ$  absolut entspricht. Die Wechselwirkung zweier benachbarter Elementarströme dürfte wohl die richtige Größenordnung für die Ordnungsenergie eines Elementarstromes in einer völlig geordneten Umgebung liefern. Es muß darauf hingewiesen werden, daß die gleiche Abschätzung der Sprungtemperatur von H. Welker<sup>6</sup> auf Grund wesentlich anderer Vorstellungen durchgeführt worden ist.

Die Überlegungen Frenkels gehen aber noch immer von der Annahme des, wenn auch durch quantenmechanische Begriffe modifizierten, ursprünglichen Stoßmechanismus der Elektronengasttheorie aus. Auf der gleichen Ebene liegen die Einwände von Bethe und Fröhlich. Es fragt sich nur, ob es möglich wäre, durch eine geeignete Modifikation des Modells die Frenkelschen Grundgedanken weiter zu entwickeln. Man könnte vor allem unter Verwertung bestimmter Erfahrungen, die allerdings an Halbleitern gewonnen worden sind, versuchen, das mechanische Bild der Zusammenstöße durch das mehr chemische Bild von Bindungswechseln zu

<sup>3</sup> J. Frenkel: Phys. Rev. **48**, 907 (1933).

<sup>4</sup> H. Bethe und H. Fröhlich: Z. Physik **85**, 389 (1933).

<sup>5</sup> W. Band: Physiologic. Rev. **69**, 241 (1946).

<sup>6</sup> H. Welker: Z. Physik **114**, 525 (1939).

ersetzen. Bekanntlich haben R. W. Pohl und seine Mitarbeiter<sup>7</sup> nachgewiesen, daß die Leitfähigkeit von Alkalihalogenidkristallen an die Möglichkeit des Übergangs der Elektronen zwischen verschieden gearteten Bindungszuständen geknüpft ist. Anderseits weiß man, daß die Elektronenkonfiguration bei Metallatomen nie völlig stabil ist. Man könnte sich also vorstellen, daß einzelne Metallatome im Kristallverband infolge spontaner innerer Umlagerungen Elektronen mit thermischer Geschwindigkeit ausstoßen, während andere sie wieder absorbieren. Man könnte weiters annehmen, daß diese Elektronenemission unter normalen Verhältnissen statistisch ungeordnet auf alle Richtungen verteilt ist und daß dieser Vorgang einen zusätzlichen Freiheitsgrad für die Wärmeenergie bedeutet. Die Elektronenemission der Metallatome wäre so ein Analogon zu den Rotationsschwingungen mancher Moleküle. Die gegenüber einem Nichtleiter — wenn auch bei normalen Temperaturen nur um einen unmeßbar kleinen Betrag — erhöhte spezifische Wärme eines Metalls (in der Nähe des absoluten Nullpunktes wird diese Differenz dagegen eindeutig meßbar) stammt also nach dieser Auffassung aus der erhöhten Freiheit des Atoms, das einerseits als Ganzes um seine Ruhelage schwingt und unter Umständen, bei ausreichender Amplitude, bis zu einem neuen Gitterplatz ausschwingt (Selbstdiffusion), anderseits ein (oder mehrere?) Elektronen ausschwingen läßt, wobei es gleichfalls vorkommen kann, daß das Elektron an einem freien Gitterplatz festgehalten wird und seine Zugehörigkeit an das Einzelatom aufgibt. Daß das Elektron beim Ausschwingen unmittelbar von einem anderen Atom abgefangen wird, ist unwahrscheinlich, weil wir auf Grund des Pauli-Prinzips wohl mit bestimmten Übergangsbedingungen rechnen müssen. Es ist also eher anzunehmen, daß sich ein Zwischenzustand entwickelt, bei dem die Elektronen zum Gitter als Ganzes gehören und dabei nach der Blochschen Theorie verbreiterte Niveaus bilden, so daß der Übergang von einem Atom zu diesem Kollektiv und von diesem zur neuerlichen Bindung an ein Einzelatom wesentlich erleichtert wird. Die in alle Einzelheiten gehende Durchführung dieses Bildes ist eine Aufgabe an sich, die wir einer gesonderten Arbeit vorbehalten wollen. Nur so viel sei schon hier gesagt, daß es sich dabei um eine Weiterentwicklung von Vorstellungen handelt, mit denen man in der Theorie der Halbleiter und besonders in der Kristallphosphore schon einige Erfolg gehabt hat.

Den letzten Schritt in der Loslösung von den gewohnten Begriffen wollen wir durch die Annahme vollziehen, das äußere Feld beeinflusse nicht das vom Atom unabhängige „freie“ Elektron, sondern den Emissionsvorgang als Ganzes, indem eine Orientierung der Emissionsprozesse parallel zum Feld energetisch begünstigt wird. Es wird also bei normalen Temperaturen in Analogie zu den Verhältnissen bei den paramagnetischen Körpern ein Widerstreit zwischen der Richtwirkung des elektrischen Feldes und der statistischen Unordnung der Wärmebewegung bestehen, der zur Folge hat, daß jeweils ein bestimmter, von Feld und Temperatur abhängiger Bruchteil der emittierten Elektronen sich in Feldrichtung bewegt. Wenn wir weiterhin von Elementarströmen sprechen, so wollen wir darunter die aus Atomrumpf und Elektron bestehende Einheit verstehen. Der tiefere Sinn dieser Definition wird allerdings erst später klar werden. Um nun zu einer Verallgemeinerung der Langevinschen Theorie zu kommen, ohne unser Bild durch allzu weitgehende Spezialisierung zu belasten, genügt es vorläufig, einen „Ausrichtungsgrad“  $S$  der Elementarströme zu definieren, der in der Form

$$S = f(E/k T) \quad (5)$$

vom Feld und von der Temperatur abhängt. Die Stromstärke ist ihrerseits eine Funktion des Ausrichtungsgrades

$$I = \varphi(S). \quad (6)$$

<sup>7</sup> R. W. Pohl: Physik. Z. 39, 36 (1938).

Es kommt jetzt nur darauf an, zu zeigen, daß diese beiden Abhängigkeiten sich für  $T = \text{const.}$  mit dem Ohmschen Gesetz  $I = \text{const.} \cdot E$  vereinbaren lassen.

Zu diesem Zweck genügt es, zu zeigen, daß auch die Elektronengastheorie nur durch ein Näherungsverfahren, das erst durch den Erfolg gerechtfertigt wird, zum Ohmschen Gesetz gelangt. Sie nimmt dazu erstens an, daß das Elektron sich innerhalb der freien Weglänge nach der einfachen Gleichung  $m v = e E$  bewegt und zweitens, daß die freie Weglänge ihrerseits vom Feld unabhängig ist. Auf diese Art findet sie für den mittleren Geschwindigkeitszuwachs  $\Delta v = e E/2 m \cdot l/v$ , dem der Beitrag  $e \cdot \Delta v$  zum Strom entspricht und somit über alle  $n$  Elektronen pro Kubikzentimeter gemittelt

$$I = \frac{n e^2 l}{m v} \cdot E = \text{const.} \cdot E. \quad (7)$$

Wir sind nun allerdings nicht in der Lage, anzugeben, nach welchem Kraftgesetz das Herausdrehen der Elementarströme aus ihrer durch die thermische Verteilung bestimmten Richtung erfolgt. Aber auch in der Elektronengastheorie stellt die Annahme der Bewegungsgleichung  $m v = e E$  eine ungeheure Vereinfachung dar, die den Einfluß der atomaren Felder durch Pauschalgrößen ersetzt. Daher kann kaum ein Einwand bestehen, wenn wir annehmen, daß auch für unser Modell die einfache Beschleunigungsgleichung als erste Näherung gelten soll, so daß wir die zu Gl. (7) führenden Überlegungen glatt übernehmen können. Genauer gesagt: man darf wohl annehmen, daß sich die Gl. (5) für kleine Werte des Arguments durch eine lineare Beziehung

$$S = \text{const. } E/k T \quad (5a)$$

annähern läßt. Das gleiche gilt in erhöhtem Maß für die Gl. (6). Man erhält also schließlich für die Stromstärke den Ausdruck

$$J = \text{const. } E/k T \quad (6a)$$

als eine Näherung, die nur für sehr kleine Feldstärkenwerte gelten sollte. Da auf der anderen Seite die Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes experimentell bis zu sehr hohen Werten der Stromdichte nachgewiesen ist, müßte angenommen werden, daß die dabei auftretenden Feldstärkenwerte noch immer klein sind im Sinne der Gl. (5a). Tatsächlich sind die Feldstärken selbst bei sehr hohen Stromdichten noch immer weit unter 1 Volt pro cm, also klein gegenüber den atomaren Energien. Man könnte aber auf Grund von Gl. (6a) annehmen, daß Abweichungen vom Ohmschen Gesetz auftreten, wenn man sehr tiefe Temperaturen und hohe Stromdichten vereinigt. Besonders interessant wäre die Durchführung von Messungen in *He II*, dessen extrem gute Wärmeleitfähigkeit die Anwendung höchster Stromdichten erlauben würde.

Daß unser Modell so nebenbei die qualitativ richtige Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur liefert, darf wohl auch als Erfolg gebucht werden.

Eine eingehendere Untersuchung zeigt, daß auch bezüglich der verwickelteren Effekte die Lorentz-Sommerfeldsche Theorie vom Gesichtspunkt unseres Modells als Näherungslösung in Geltung bleibt, nur liefert dieses gewisse einschränkende Nebenbedingungen, so daß nicht alle Effekte, die sich formal aus den Sommerfeldschen Gleichungen berechnen lassen, mit dem abgeänderten Stoßmechanismus in Einklang zu bringen sind. Das trifft aber gerade jene Effekte, deren Mechanismus ohnehin unklar ist (Wärmestrom ohne Temperaturgefälle usw.).

### 3. Die „Weißsche Theorie“ der Supraleitung.

Von den im vorstehenden entwickelten Vorstellungen gelangen wir ohne weitere Schwierigkeiten zu den gleichen Folgerungen, die Weiß aus der Theorie des Para-

magnetismus gezogen hat. Wenn wir in unserem Ansatz für den Ausrichtungsgrad der Elementarströme das Feld  $E$  durch ein der Ausrichtung proportionales „inneres“ Feld ergänzen,

$$S = f \{(E + \text{const.} \cdot S)/k T\},$$

so führt uns dies genau so wie im Punkt 2 zu einer „spontanen“ Ausrichtung bei  $E = 0$ , wenn die unbestimmte Funktion  $f$  nur die Bedingung erfüllt, 1. im Nullpunkt eine Ableitung zu haben, die positiv und endlich ist, und 2. immer unterhalb der Nullpunktstangente zu bleiben. Da der Ausrichtungsgrad, wie immer auch die Funktion  $f$  beschaffen sein mag, mit wachsendem Argument dem Sättigungswert Eins zustreben muß, also die Kurve  $f(x)$  jedenfalls zur  $x$ -Achse konkav sein muß, darf die Erfüllung dieser beiden Bedingungen als äußerst wahrscheinlich angesehen werden. Dann erscheint also der Sprungpunkt der Supraleitung als Analogon zum Curie-Punkt der Ferromagnetika als jene Temperatur, oberhalb derer keine spontane Ausrichtung, dort der Elementarmagnete, hier der Elementarströme, mehr möglich ist.

Das entscheidende Problem liegt jetzt nur darin, ob sich die Erscheinungen der Supraleitung tatsächlich auf eine spontane Ausrichtung von Elementarströmen zurückführen lassen. Es ist wohl selbstverständlich, daß diese Ausrichtung in einem abgeschlossenen Versuchskörper zur Ausbildung von in sich geschlossenen Strömen führen muß, wobei die räumliche Verteilung und Ausdehnung dieser „Dauerströme“ von den Nebenbedingungen (Form des Versuchskörpers, Temperaturverteilung beim Übergang zur Supraleitung usw.) abhängen wird.

Es gibt nun, wie ich glaube, eine sehr eindrucksvolle experimentelle Tatsache, die kaum anders als in dem angedeuteten Sinn interpretiert werden kann. Wenn man in einem Supraleiter durch Einschalten eines Magnetfeldes einen Dauerstrom induziert und sodann durch Erhöhung der Temperatur den Supraleitzustand wieder zerstört, so könnte man erwarten, daß sich der Dauerstrom in dem entstehenden Ohmschen Widerstand totläuft und seine durch  $LI^2/2$  meßbare Energie als irreversible Joulesche Wärme in Erscheinung tritt. Nun ist der Übergang  $S \rightarrow N$  im Magnetfeld mit der Zufuhr einer Wärmemenge  $Q$  verbunden, ebenso aber auch der umgekehrte Übergang  $N \rightarrow S$ . Die Messungen zeigen, daß der Übergang streng reversibel ist, obgleich die Energie des Dauerstromes, besonders bei tieferen Temperaturen, ein Vielfaches der gemessenen Umwandlungswärme sein kann. Es bleibt also nur die Annahme, daß die Energie des Stromes nicht durch den Ohmschen Widerstand zerstört wird, sondern unmittelbar in die innere Energie der normalleitenden Phase verwandelt wird. Das stimmt aber völlig damit überein, daß wir beim umgekehrten Vorgang, der Abkühlung eines Supraleiters im konstanten Magnetfeld von einer Temperatur oberhalb bis zu einer Temperatur unterhalb des Sprungpunktes, Dauerströme erhalten, die das äußere Magnetfeld vom Innern des Versuchskörpers abschirmen (Meißner-Ochsenfeld-Effekt). Besonders im letzten Fall, wo wir uns nicht mehr auf das Induktionsgesetz berufen können, ist es wohl klar, daß der Abschirmstrom eine spontane Leistung der Gitterenergie darstellt. Wir werden also auch beim Einschalten des Magnetfeldes im supraleitenden Zustand annehmen dürfen, daß das elektrische Wirbelfeld lediglich eine Ausrichtung der schon vorhandenen Dauerströme bewirkt.

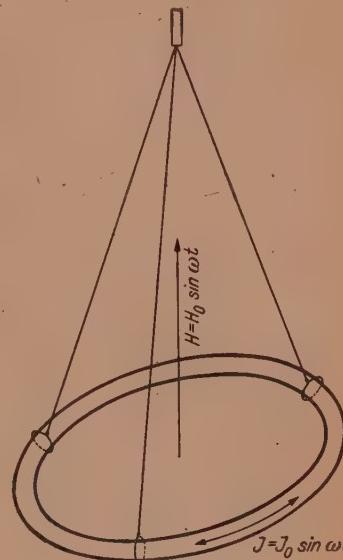


Abb. 2.

Eine zusätzliche Bestätigung dieser Auffassung wird man in einer Beobachtung finden können, die Graßmann und Eicke<sup>8</sup> an ringförmigen Körpern gemacht haben. Mit Hilfe einer ungemein empfindlichen Methode konnten sie nachweisen, daß beim erstmaligen Induzieren eines Dauerstroms ein kleiner Energiebetrag verlorengeht. Da bei diesen Versuchen durch abwechselndes Ein- und Ausschalten eines Magnetfeldes ein Dauerstrom induziert und durch den Ausschaltstrom wieder vernichtet wurde, sind sie ein Beweis dafür, daß das Umklappen der Ausrichtung um 180° keinen Energieaufwand kostet. Daß aber die Drehung der Dauerströme mit Energieaufwand verbunden ist, dafür könnten auch die Versuche von Onnes und Tuyn<sup>9</sup> über die Unverschiebbarkeit der Ströme im Supraleiter angeführt werden, wenn nicht sie an Hohlkörpern ausgeführt worden wären, in denen etwas verwickeltere Verhältnisse herrschen.<sup>10</sup>

Zum Abschluß sei noch ein Versuch besprochen, der überdies den Vorteil hat, die Identität des Leitungsmechanismus im normal- und supraleitenden Zustand zu demonstrieren. Man hängt einen ringförmigen Leiter (Abb. 2) an Fäden so auf, daß er Torsionsschwingungen ausführen kann, und setzt ihn der Wirkung eines zu seiner Fläche senkrechten magnetischen Wechselfeldes aus. Es zeigt sich, daß der Ring in Schwingungen gerät, deren Amplitude natürlich gesteigert wird, wenn man die Frequenz des Wechselfeldes mit der Torsionsschwingung in Übereinstimmung bringt. Außerdem ist die Amplitude im supraleitenden Zustand infolge des Wegfalls des Ohmschen Widerstandes größer als im normalleitenden. In beiden Fällen ist aber die Phase der Schwingungen so, daß sie der der Elektronenbewegung entgegengesetzt ist, die Amplitude ist dem Verhältnis  $e/m$  proportional. Wir werden somit diese Erscheinung als den Rückstoß der emittierten Elektronen auf ihre Atome deuten dürfen. Im stationären Zustand wird dieser Rückstoß durch die Impulsabgabe bei der Rekombination wieder aufgehoben, nur im nichtstationären Zustand tritt er in Erscheinung. Auf Grund der Elektronengasttheorie würde man gerade den entgegengesetzten Effekt erwarten, nämlich ein Nachschleppen des Gitters durch die vorauseilenden Elektronen als eine Art Umkehr des Tolman-Effekts. Man hat den geschilderten Versuch, der an einer supraleitenden Kugel von Kikoin und Gubar,<sup>11</sup> an einem normalleitenden Solenoid in einer leicht modifizierten Form von Barnett<sup>12</sup> ausgeführt worden ist, nicht als in Widerspruch mit der Elektronentheorie stehend empfunden, weil er in Anlehnung an den Versuch von Einstein-de Haas ausgeführt worden ist. Man hat deshalb nicht so sehr an die Mechanik der Elektronenbewegung als an das entstehende magnetische Moment, dem man einen Drehimpuls zuordnete, gedacht und es für selbstverständlich gehalten, daß so wie bei dem Versuch mit dem Ferromagnetikum ein Rückstoß auftritt, der dem Satz von der Erhaltung des Drehimpulses entspricht. Dabei hat man übersehen, daß dieser Satz nur dann gilt, wenn bloß innere Kräfte wirksam sind. Man könnte also, wenn man sehr vorsichtig sein wollte, die beiden Versuche so deuten, daß man annimmt, die äußeren Felder lösen im Leiter zuerst eine durch innere Kräfte bedingte Polarisation aus, die dann ihrerseits durch einen noch zu klarenden Mechanismus den Strom bewirkt. Demgegenüber scheint die hier vorgeschlagene Deutung doch einfacher und einleuchtender zu sein.

Die bisherigen Ausführungen haben sich auf in sich geschlossene Ströme bezogen, wie sie als Abschirmströme in Supraleitern durch Magnetfelder induziert werden. Man könnte nun meinen, daß im Falle eines in einem normalleitenden Stromkreis

<sup>8</sup> P. Graßmann und H. Eicke: Physik. Z. 38, 429 (1937).

<sup>9</sup> K. H. Onnes: Comm. Leiden Suppl. Nr. 50a, 1924.

<sup>10</sup> K. M. Koch: Z. Physik 118, 1 (1941), Nachtrag.

<sup>11</sup> I. J. Kikoin und S. W. Gubar: C. R. [Doklady] Acad. Sci. URSS 19, 249 (1938).

<sup>12</sup> S. J. Barnett: Philos. Mag. J. Sci. 12, 349 (1931).

eingeschalteten Supraleiters etwas andere Verhältnisse vorliegen. Im stationären Zustand sind freilich keine besonderen Schwierigkeiten zu sehen, denn die Bildung geschlossener Strombahnen ist ja mehr ein durch Formfaktoren usw. bedingter sekundärer Effekt, wir können uns eine einseitige Ausrichtung der Elementarströme, bei der an den Rändern ein stetiger Übergang zum normalen Leitungsmechanismus stattfindet, durchaus vorstellen. Nur für den Einschaltvorgang sind gewisse Schwierigkeiten: haben wir den Körper vorher im stromlosen Zustand abgekühlt, so sind nun geschlossene Strombahnen in ihm anzunehmen, die bei der Einschaltung des äußeren Stromkreises irgendwie umgelagert werden müssen. Man könnte sich nun denken, daß hierbei die auch unterhalb des Sprungpunktes infolge unvollständiger Ausrichtung noch bestehenden normalleitenden Partien eine Rolle spielen, indem sie im ersten Augenblick die Leitung übernehmen und durch das in ihnen entwickelte elektrische Feld die Ausrichtung der Elementarströme bewirken. Diese Frage könnte durch einen Versuch entscheidbar sein, indem bei raschem Einschalten des Stromes irgendwelche Verzögerungsscheinungen auftreten müßten, die sich oszillographisch nachweisen lassen würden. Möglicherweise würde man auch bei Stromstößen von extrem kurzer Dauer, wie sie die heutige Impulstechnik unschwer erzeugen kann, keine Supraleitung mehr feststellen, weil die Zeit zur Ausrichtung der Elementarströme schon in die Größenordnung des Impulses fällt.

#### Schlußbemerkungen.

Es muß vor allem festgestellt werden, daß die hier entwickelte Hypothese der Elektronenübergänge von einem Atom zum anderen als Basis des Leitungsvorganges nicht ganz neu ist. Man vergleiche dazu die Darstellung von Grüneisen im Geigerschen Handbuch der Physik, Bd. XIII, sowie die Zusammenfassung von Kretschmann.<sup>13</sup> Nur hat man es bisher unterlassen, zu untersuchen, wie weit diese Vorstellung mit den mathematischen Ansätzen der Lorentz-Sommerfeldschen Theorie verträglich ist. Darin sehe ich aber die künftige Aufgabe, die nach beiden Richtungen hin Erfolg verspricht; nach der einen: weil das Modell durch die Möglichkeit einer mathematischen Formulierung naturgemäß an Präzision gewinnt, nach der anderen: weil die präzisere Form der Modellvorstellung inhaltslose, formale Ableitungen ausschließt bzw. in ihrer Geltung einschränkt, mit denen man sich bisher auseinandersetzen mußte. Diese Entwicklung vorbereitet zu haben, wäre dann das Verdienst unserer provisorischen Überlegungen.

Überhaupt muß betont werden, daß die vorstehenden Ausführungen nicht den Anspruch erheben, als eine neue Theorie des Leitungsvorganges und der Supraleitung genommen zu werden, sondern nur als Programm zur Erarbeitung einer solchen. Soviel kann allerdings schon jetzt gesagt werden, daß unser Modell bei positivem Ausgang der oben skizzierten Untersuchung, d. h. im Falle es sich in großen Linien mit den mathematischen Formulierungen der Elektronengasttheorie verträgt, für das Verständnis der Supraleitung der letzteren überlegen ist. Den Kernpunkt des Problems stellt wohl die Ausgestaltung der Theorie der Ordnungszustände dar, die von Bragg und Williams<sup>14</sup> zuerst aufgestellt, von Bethe<sup>15</sup> weiter entwickelt, in einigen wesentlichen Punkten doch noch der Aufklärung bedarf.

Und schließlich ist zu hoffen, daß die neue Modellvorstellung anregend auf die experimentelle Forschung wirken wird. Die im Gebiet des Ferromagnetismus bereits weitgehend untersuchten Zusammenhänge zwischen den Ausrichtungsvorgängen und den inneren Spannungen dürfte bei ihrer Übertragung auf das Leitungsproblem

<sup>13</sup> E. Kretschmann: Physik. Z. 28, 565 (1927).

<sup>14</sup> W. L. Bragg und E. J. Williams: Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A 145, 699 (1934).

<sup>15</sup> H. Bethe: Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A 150, 552 (1935).

neue Gesichtspunkte bringen. Besonders im Gebiet der Supraleitung versprechen die Parallelen zum Ferromagnetismus, die Hypothese der spontanen Ausrichtung, der Weißschen Bezirke usw., fruchtbar zu werden. Allerdings würde ich beinahe glauben, daß auch manche noch etwas verschleierte Vorstellungen im Bereich des Ferromagnetismus durch den Vergleich mit den analogen Fragen der Supraleitung an Klarheit gewinnen.

(Eingegangen am 10. Mai 1947.)

## Die Torsion geschlitzter Hohlwellen.

Von H. Parkus, Wien.

Mit 2 Textabbildungen.

In der vorliegenden Arbeit werden die Spannungen berechnet, die in einer dünnwandigen, auf Verdrehen beanspruchten Hohlwelle auftreten, welche Durchbrechungen

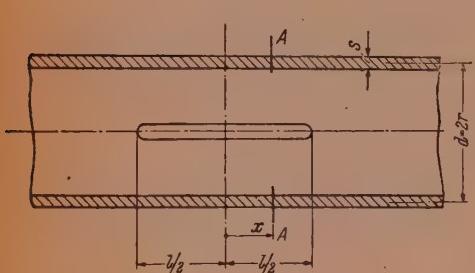


Abb. 1.

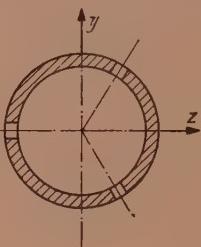
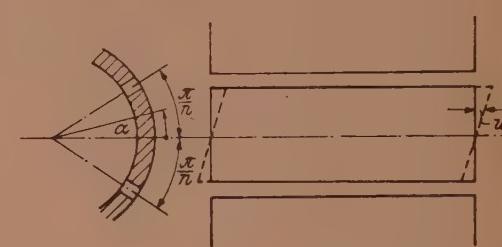


Abb. 2.



in Form von schmalen Längsschlitzten aufweist (Abb. 1). Derartige Schlitzte sind aus konstruktiven Gründen manchmal notwendig; sie führen aber zu einer beträchtlichen Herabsetzung der Drehsteifigkeit und zu Spannungserhöhungen, welche eine genauere Untersuchung wünschenswert erscheinen lassen.

Der mittlere Durchmesser der Hohlwelle sei  $d$ , die Wandstärke  $s$ , die Schlitzlänge  $l$ , die Anzahl der symmetrisch verteilten Schlitzte sei  $n$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ). Wir denken uns das Rohr längs  $A-A$  an der Stelle  $x$  durchschnitten (Abb. 1) und betrachten einen der  $n$  Streifen, aus denen sich der Querschnitt im Bereich der Schlitzte zusammensetzt (Abb. 2).

Bei der Verdrehung dieses Streifens werden Verschiebungen  $u$  in Richtung der Stabachse auftreten. Man kann nun annehmen, daß dort, wo der Streifen an das ungeschlitzte Rohr anschließt, diese Verschiebungen vollständig verhindert werden. Diese „Verwölbungsbehinderung“ hat natürlich Normalspannungen in Richtung der Wellenachse zur Folge und unsere Annahme der vollständigen Wölbbehinderung besagt dann, daß die unter diesen Normalspannungen auftretenden Verschiebungen des ungeschlitzten Rohres vernachlässigbar klein sind gegenüber denen der Streifen.

Für die Verwölbung eines dünnwandigen, offenen Querschnittes gilt<sup>1</sup>

$$u = \varphi(y, z) \vartheta'(x), \quad (1)$$

wo  $\varphi$  die sog. „Einheitsverwölbung“ und  $\vartheta' = \frac{d\vartheta}{dx}$  die erste Ableitung des Verdrehwinkels  $\vartheta(x)$  bedeutet. Für den hier vorliegenden Fall konstanter Querschnitts-

<sup>1</sup> R. Kappus: Drillknicken zentrisch gedrückter Stäbe mit offenem Profil im elastischen Bereich. Luftfahrt-Forsch. 14, 444 (1937).

krümmung ist bei Einführung von Polarkoordinaten  $r, \alpha$  die Einheitsverwölbung nur von  $\alpha$  abhängig; und zwar wird<sup>1</sup>

$$\varphi = - \int r^2 d\alpha + \varphi_0 = - r^2 \alpha + \varphi_0.$$

Normieren wir die Verwölbungsfunktion so, daß in jedem Schnitt die resultierende Verschiebung für jeden einzelnen Streifen und damit auch für den Gesamtquerschnitt verschwindet (die Schlitzbreite wird gegenüber der Streifenbreite vernachlässigt),

$$\int_{-\frac{\pi}{n}}^{+\frac{\pi}{n}} u d\alpha = 0, \quad (2)$$

so wird  $\varphi_0 = 0$  und wir erhalten

$$\varphi = - r^2 \alpha. \quad (3)$$

Der Wölbwiderstand  $J_w$  des Gesamtquerschnittes ist damit

$$J_w = n \int_{-\frac{\pi}{n}}^{+\frac{\pi}{n}} r \varphi^2 s d\alpha = \frac{2 \pi^3}{3 n^2} r^5 s \quad (4)$$

und der Drillwiderstand  $J_d$  (wenn die Streifenquerschnitte als sehr dünn betrachtet werden)

$$J_d = n \frac{2 \pi}{n} r \frac{s^3}{3} = \frac{2 \pi}{3} r s^3. \quad (5)$$

Im Gegensatz hierzu beträgt der Drillwiderstand des ungeschlitzten Rohrquerschnittes

$$J_{d0} = 2 \pi r^3 s. \quad (6)$$

Die Differentialgleichung der Torsion des offenen, dünnwandigen Querschnittes lautet, wenn  $M$  das Drehmoment bedeutet,

$$M = G J_d \vartheta' - E J_w \vartheta''', \quad (7)$$

wobei im vorliegenden Fall die Randbedingungen gelten:

$$x = \pm \frac{l}{2} \dots \vartheta' = 0. \quad (8)$$

Diejenige Lösung der Gl. (7), die den Randbedingungen (8) genügt, ist

$$\vartheta' = \frac{M}{G J_d \operatorname{Co}f \frac{\kappa l}{2}} \left( \operatorname{Co}f \frac{\kappa l}{2} - \operatorname{Co}f \kappa x \right), \quad (9)$$

worin

$$\kappa = \sqrt{\frac{G J_d}{E J_w}} = \frac{s n}{\pi r^2} \sqrt{\frac{1}{2(1+\mu)}}. \quad (10)$$

$\mu$  ist die Querdehnungszahl.

Wir können nun die auftretenden Spannungen berechnen. Für die durch die Wölbehinderung hervorgerufenen Normalspannungen  $\sigma_x$  gilt unter Berücksichtigung dessen, daß es sich um einen dünnwandigen Querschnitt handelt, bei dem die Spannungen  $\sigma_r$  und  $\sigma_\alpha$  gegenüber  $\sigma_x$  vernachlässigt werden können:

$$\sigma_x = E \frac{\partial u}{\partial x}$$

und unter Beachtung von Gl. (1) und (3)

$$\sigma_x = - E r^2 \alpha \vartheta''. \quad (11)$$

Die Wölbspannungen verlaufen somit linear über die Streifenbreite und geben gemäß der Normierungsbedingung (2) keine Resultierende in Richtung der Wellenachse. Wohl aber liefern sie ein resultierendes Biegemoment. Wie man leicht nachrechnet, heben sich jedoch die Biegemomente der einzelnen Streifen gegenseitig auf. (Das gilt aber nur bei gleichmäßig über den Umfang verteilten Schlitzten!) Man kann

dies auch so ausdrücken: Der Schubmittelpunkt des einzelnen Streifens fällt nicht mit dem Drillruhepunkt zusammen, der auf der Wellenachse liegt. Die Drehung um diesen Punkt muß somit durch ein äußeres Biegemoment erzwungen werden, dem die Wölbspannungen das Gleichgewicht halten. Für den Gesamtquerschnitt gilt das aber nicht, da für diesen Drillruhepunkt und Schubmittelpunkt zusammenfallen. Die Wölbspannungen bilden hier ein Gleichgewichtssystem.

Gemäß den Beziehungen

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_w}{\partial \alpha} = 0 \quad (12)$$

treten zusammen mit den Normalspannungen  $\sigma_x$  Schubspannungen  $\tau_w$  in Umfangsrichtung auf, die konstant über die Querschnittsdicke  $s$  verlaufen und den Anteil  $-E J_w \vartheta'''$  des Gesamtdrehmomentes aufnehmen, der durch Wölbkrafttorsion übertragen wird. Sie addieren sich zu den Schubspannungen  $\tau_T$ , die vom Anteil  $G J_d \vartheta'$  des Gesamtmomentes herrühren, der der reinen (St. Venantschen) Torsion entspricht. Diese Schubspannungen verlaufen linear über die Wandstärke  $s$  und nehmen am Innen- bzw. Außenrand in  $\alpha = 0$  ihren Größtwert an:

$$\tau_{T \max} = \frac{3 G J_d \vartheta'}{n \frac{2 r \pi}{n} s^2} = \frac{3 G J_d \vartheta'}{2 r \pi s^2}$$

und mit  $J_d$  gemäß Gl. (5):

$$\tau_{T \max} = G s \vartheta'. \quad (13)$$

Die Schubspannungen  $\tau_w$  folgen aus Gl. (12) durch Integration:

$$\tau_w = -r \int \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} d\alpha + C = E r^3 \frac{\alpha^2}{2} \vartheta''' + C.$$

An den freien Rändern  $\alpha = \pm \frac{\pi}{n}$  muß  $\tau_w = 0$  sein. Damit erhalten wir:

$$\tau_w = E r^3 \frac{\vartheta'''}{2} \left[ \alpha^2 - \left( \frac{\pi}{n} \right)^2 \right], \quad (14)$$

also eine parabolische Verteilung mit  $\tau_{w \max} = -\frac{\pi^2}{2 n^2} E r^3 \vartheta'''$ .

Mit den Spannungskomponenten  $\sigma_x$ ,  $\tau_T$  und  $\tau_w$  haben wir bereits alle maßgebenden Größen des vorliegenden ebenen Spannungszustandes erfaßt. Eine nennenswerte Kerbwirkung durch die an den Enden voll ausgerundeten Schlitze tritt nicht ein, wie man aus folgender Überlegung schließen kann. In der unmittelbaren Umgebung der Schlitze treten im wesentlichen nur Normalspannungen  $\sigma_x$  parallel zur Schlitzlängsachse auf. Bei einem derartigen, in Richtung des Kraftflusses liegenden Spalt hängt aber die Spannungserhöhung durch Kerbwirkung vor allem vom Krümmungsradius der Längsberandung ab<sup>2</sup> und verschwindet mit gegen Null gehender Krümmung. Da wir außerdem die Schlitze als schmal voraussetzen, können wir somit von der Berücksichtigung der Kerbwirkung absehen.

Im ungeschlitzten Rohrquerschnitt beträgt die über die Wandstärke konstante Schubspannung

$$\tau_0 = \frac{M}{2 r^2 \pi s}. \quad (15)$$

Wenn wir den im Bereich der Schlitze sich bildenden ebenen Spannungszustand mit dem durch Gl. (15) gegebenen Zustand des reinen Schubes vergleichen wollen, müssen wir beide auf eine Vergleichsspannung beziehen. Wir wählen hierzu die größte

<sup>2</sup> K. Wolf: Beiträge zur ebenen Elastizitätstheorie. Z. techn. Physik 2, 209 (1921). — Th. Pöschl: Über eine partikuläre Lösung des biharmonischen Problems für den Außenraum der Ellipse. Math. Z. 11, 95 (1921).

auftretende Schubspannung, also beim ungeschlitzten Rohr  $\tau_0$  gemäß Gl. (15) und im geschlitzten Rohrstück  $\tau_v$  gemäß

$$\tau_v = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_\alpha^2 + 4 (\tau_w + \tau_T)^2}.$$

Aus Gl. (9) folgt durch Differentiation

$$\vartheta'' = -\frac{\kappa M}{G J_d} \frac{\operatorname{Cof} \kappa x}{\operatorname{Cof} \frac{\kappa l}{2}}, \quad \vartheta''' = -\frac{M}{E J_w} \frac{\operatorname{Cof} \kappa x}{\operatorname{Cof} \frac{\kappa l}{2}}.$$

In  $x = 0$  ist  $\vartheta'' = 0$ ; somit wird dort die Vergleichsspannung, die wir mit  $\tau_{v1}$  bezeichnen wollen,

$$\tau_{v1} = \tau_{w\max} + \tau_{T\max} = -\frac{\pi^2}{2n^2} E r^3 \vartheta''' + G \vartheta' s = \frac{3}{\pi d s^2} \frac{M}{\operatorname{Cof} \frac{\kappa l}{2}} \left( \frac{s}{d} + \operatorname{Cof} \frac{\kappa l}{2} - 1 \right). \quad (16)$$

In  $x = \pm \frac{1}{2}$  ist  $\vartheta' = 0$ , somit  $\tau_T = 0$  und

$$\sigma_\alpha = E r^2 \alpha \frac{\kappa M}{G J_d} \operatorname{Tg} \frac{\kappa l}{2}, \quad \tau_w = -r^3 \frac{M}{2 J_w} \left[ \alpha^2 - \left( \frac{\pi}{n} \right)^2 \right].$$

Wir untersuchen die beiden in Betracht kommenden Stellen  $\alpha = 0$  und  $\alpha = \pm \frac{\pi}{n}$ . In  $\alpha = 0$  wird die mit  $\tau_{v2}$  bezeichnete Vergleichsspannung

$$\tau_{v2} = \tau_{w\max} = \frac{M r^3}{2 J_w} \left( \frac{\pi}{n} \right)^2 = \frac{3 M}{\pi d^2 s}, \quad (17)$$

wenn für den Wölbwiderstand der Ausdruck Gl. (4) eingesetzt wird. In  $\alpha = \pm \frac{\pi}{n}$  haben wir unter Berücksichtigung von Gl. (5)

$$\tau_{v3} = \frac{\sigma_{z\max}}{2} = \frac{E}{2G} \frac{r^2 \alpha}{J_d} \frac{\pi}{n} M \operatorname{Tg} \frac{\kappa l}{2} = \sqrt{\frac{1+\mu}{2}} \frac{3 M}{\pi d^2 s} \operatorname{Tg} \frac{\kappa l}{2}. \quad (18)$$

Mit  $\tau_0$  aus Gl. (15) bilden wir nun die Verhältniszahlen  $\frac{\tau_v}{\tau_0}$ , die uns unmittelbar die Spannungserhöhung durch die Schlitze angeben:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_{v1}}{\tau_0} &= \frac{3}{2} \left( \frac{d}{s} - \frac{\frac{d}{s} - 1}{\operatorname{Cof} \frac{\kappa l}{2}} \right), \\ \frac{\tau_{v2}}{\tau_0} &= \frac{3}{2}, \\ \frac{\tau_{v3}}{\tau_0} &= \frac{3}{2} \sqrt{\frac{1+\mu}{2}} \frac{d}{s} \operatorname{Tg} \frac{\kappa l}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Die Größe  $\kappa$  ist aus Gl. (10) zu entnehmen. Damit wird

$$\frac{\kappa i}{2} = \frac{n}{\pi} \sqrt{\frac{2}{1+\mu}} \frac{s l}{d^2}. \quad (20)$$

Wir betrachten nun die Gl. (19) noch etwas näher. Die Verhältniszahl  $\frac{\tau_{v1}}{\tau_0}$  schwankt zwischen den Grenzen

$$\frac{3}{2} \leq \frac{\tau_{v1}}{\tau_0} \leq \frac{3}{2} \frac{d}{s},$$

wobei der untere Grenzwert  $\frac{\kappa l}{2} = 0$  und der obere  $\frac{\kappa l}{2} = \infty$  entspricht.  $\frac{\tau_{v3}}{\tau_0}$  liegt für die gleichen Werte von  $\frac{\kappa l}{2}$  im Bereich

$$0 \leq \frac{\tau_{v3}}{\tau_0} \leq \frac{3}{2} \sqrt{\frac{1+\mu}{2}} \frac{d}{s}.$$

Die beiden Grenzwerte von  $\frac{\tau_{v3}}{\tau_0}$  sind also kleiner als die entsprechenden Werte von

$\frac{\tau_{v1}}{\tau_0}$ ; im mittleren Bereich liegt jedoch, wie man leicht nachrechnet, der Fall gerade umgekehrt. Da für große (praktisch aber kaum in Frage kommende) Werte von  $\frac{\pi l}{2}$  unsere Rechnung wegen der Gefahr des Ausbeulens der Streifen nicht mehr zutreffend ist, können wir also schreiben, wenn jetzt mit  $\tau$  die größte Spannung im geschlitzten Rohrteil bezeichnet wird,

$$\frac{\tau}{\tau_0} = 3 \sqrt{\frac{1+\mu}{8}} \frac{d}{s} \operatorname{tg} \left( \frac{n}{\pi} \sqrt{\frac{2}{1+\mu}} \frac{s l}{d^2} \right) \geq 1.5. \quad (21)$$

Für Abmessungen bis etwa  $n \frac{l}{d} = 10$  lässt sich die hyperbolische Tangensfunktion durch das Argument ersetzen. Wir erhalten dann

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{3}{2\pi} n \frac{l}{d} = 0.48 n \frac{l}{d} \geq 1.5, \quad (22)$$

also eine sehr handliche Beziehung, die für den praktischen Gebrauch wohl immer ausreichen dürfte.

Wenn die Schlitze nicht gleichmäßig über den Umfang verteilt sind (z. B. bei  $n = 1$ ), so fallen Rohrachse und Schubmittelpunkt nicht zusammen. Die Torsion um die Rohrachse könnte dann nur durch entsprechende äußere Kräfte und Biegemomente erzwungen werden. Sind diese nicht vorhanden, so verbiegt sich die Welle unter dem Angriff des Drehmomentes.

### Zusammenfassung.

Für das dünnwandige, tordierte Rohr mit  $n$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ) gleichmäßig über den Umfang verteilten Längsschlitten wird die Spannungserhöhung durch die Schlitze gegenüber dem ungeschwächten Rohrquerschnitt berechnet. Das Verhältnis der beiden Spannungen beträgt mindestens 1.5 und lässt sich für die praktisch in Betracht kommenden Abmessungen aus einer einfachen Formel bestimmen.

(Eingegangen am 26. November 1946.)

## Buchbesprechungen.

**Ausgewählte Kapitel aus der Physik.** Nach Vorlesungen an der Technischen Hochschule in Graz. Von K. W. F. Kohlrausch. In fünf Teilen. III. Teil: Wärme. Mit 35 Textabb., VI, 127 S. Wien: Springer-Verlag. 1948. In Österreich: S 18.—. Im Ausland: sfr 9.—.

Nach den beiden ersten Teilen — I. Mechanik, II. Optik — ist nunmehr der III. Teil: Wärme herausgekommen, der zunächst wieder als Behelf für Studierende gedacht ist und sich dementsprechend im wesentlichen auf den Vorlesungsstoff beschränkt. Die behandelten Kapitel — A. Allgemeine Grundlagen, B. Die thermischen Eigenschaften der Stoffe (Kinetische Theorie der Materie und Erfahrungstatsachen), C. Die Hauptsätze der Thermodynamik und ihre Anwendungen — sind klar und übersichtlich durchgearbeitet und werden sicherlich auch über den ihnen zugedachten Leserkreis hinaus um so mehr von Interesse sein, als die im Vorwort angeführten Standardwerke heute nur schwer zugänglich sind. Als Ergänzung ist eine kurze Zusammenstellung über den als bekannt vorausgesetzten Mittelschulstoff und ein Namens- und Sachverzeichnis beigelegt.

Falls die angekündigten letzten zwei Hefte — IV. Elektrizität und V. Aufbau der Materie — rechtzeitig erscheinen, wird noch in diesem Jahre ein gutes, etwa 600 Seiten umfassendes Buch über Physik für jedermann zu einem erschwinglichen Preis erhältlich sein.

F. Magyar, Wien.

**Ausgewählte Kapitel aus der Physik.** Nach Vorlesungen an der Technischen Hochschule in Graz. Von K. W. F. Kohlrausch. In fünf Teilen. IV. Teil: Elektrizität. Mit 115 Textabb. VIII, 253 S. Wien: Springer-Verlag. 1948. In Österreich: S 36.—. Im Ausland: sfr 16.—.

Nach den ersten drei Bänden: Mechanik, Optik und Wärme ist nun auch der vierte: Elektrizität erschienen. Nach einer kurzen Zusammenstellung des vorausgesetzten Mittelschulstoffes behandelt

der Verfasser im Abschnitt A. Einführender Überblick die Entwicklung der Elektrizitätslehre von Coulomb bis Maxwell, das Elektron, das Ätherproblem und die Entwicklung der elektrischen Maßsysteme. Im Abschnitt B. Elektrostatik findet man die Grundlagen, das elektrostatische Feld, das Verhalten der Leiter, den Kondensator, das Verhalten der Isolatoren, Elektrizitätsquellen, Metalle sowie Metall und Elektrolyt. Der Abschnitt C. Gleichförmig bewegte Elektrizität befaßt sich mit den Grundlagen, den Eigenschaften und dem Mechanismus der Leistungsströme und dem Magnetfeld des Stromes. Der letzte Abschnitt D. Ungleichförmig bewegte Elektrizität enthält die elektromagnetische Induktion, die Elektronentheorie des Magnetismus, den Wechselstrom und die Maxwellsche Theorie. Dabei wird auch auf den Zusammenhang mit der Relativitätstheorie hingewiesen. Den Abschluß des sehr klar geschriebenen Buches bildet ein ausführliches Namen- und Sachverzeichnis.

Schon eine flüchtige Durchsicht des Buches läßt erkennen, daß der vorliegende IV. Teil die gleiche gute Aufnahme finden wird, wie die bereits ausgezeichnet eingeführten ersten drei Teile. Hervorzuheben ist wieder die außerordentlich exakte physikalische Darstellungsweise des Verfassers, die dem Techniker vieles bietet, aber keine zu weit gehenden Konzessionen macht. Im ganzen ein ausgezeichneter Studienbehelf, aber nicht nur für Studenten.

F. Magyar, Wien.

**Laufzeittheorie der Elektronenröhren.** Von H. W. König. Erster Teil: Ein- und Mehrkreissysteme. Mit 72 Textabb., XII, 210 S. In Österreich: S 78.—. Im Ausland: sfr 36.—. Zweiter Teil: Kathodeneigenschaften, Vierpole. Mit 47 Textabb., IV, 144 S. In Österreich: S 60.—. Im Ausland: sfr 28.—. Wien: Springer-Verlag. 1948.

In der Hochfrequenztechnik stehen derzeit die Probleme der Erzeugung und Verstärkung elektrischer Wellen mit sehr kleiner Wellenlänge im Vordergrund. Im bisher benutzten Wellenlängenbereich kann die Elektronenströmung in der Elektronenröhre in jedem Augenblick als stationär betrachtet werden, so daß jede Elektronenröhre hinsichtlich ihrer linearen Eigenschaften als linearer Vierpol aufgefaßt werden kann. Für das derzeit interessierende Wellengebiet gab es keine Theorie, welche auch nur annähernd als eine Fortsetzung der linearen Theorie der Elektronenröhre des üblichen Wellengebietes angesehen werden konnte. Diesem Mangel hat das vom Verfasser geschaffene Werk grundlegend Abhilfe geschaffen.

Das Werk gliedert sich in zwei Teile. Im ersten Teil „Einkreis- und Mehrkreissysteme“ werden in vier Kapiteln die linearen Laufzeitscheinungen der Einkreissysteme, der Zweikreiszweikammersysteme, der Zweikreis-Dreikammersysteme und der Zweikreis-Vierkammersysteme behandelt. In der Einführung zu dem ersten Teil legt der Verfasser die wesentlichen Gesichtspunkte seiner neuen Betrachtungsweise fest. So geht er bei der Betrachtung des Verhaltens von Elektronenströmungen nicht von der bisher üblichen Spannungs-Strombetrachtung aus, sondern nimmt als Ausgangspunkt die Strom-Spannungsbetrachtung. Diese Betrachtungsweise begründet er dadurch, daß die Spannung das Linienintegral der Feldstärke ist und in den allgemeinen Grundgleichungen der Elektronenströmung nicht aufscheint, während die Stromdichte unmittelbar in Erscheinung tritt. Das lineare Problem läßt sich aber durch die Wahl der Strom-Spannungsbetrachtung allein nicht bewältigen, sondern es muß zur Schaffung einer allgemeinen Theorie der Laufzeitvorgänge auch die in der bisher üblichen Theorie angewendete Kennzeichnung des Arbeitspunktes durch Elektrodenabstände und Gleichspannungen aufgegeben werden. In der neuen Theorie wird der Arbeitspunkt durch die stationären Laufwinkel und Geschwindigkeiten festgelegt. Mit dieser Methode gelingt es, die linearen Eigenschaften sämtlicher Röhrenanordnungen mit ebener Elektronenströmung aus einem einzigen Vierpol abzuleiten.

Im ersten Kapitel werden die verschiedenartigen Betriebszustände eines Einkreissystems mit voller Berücksichtigung der Raumladungswirkung unter einem einheitlichen Gesichtspunkt behandelt. Der Arbeitspunkt des Systems wird durch die beiden Laufwinkel und die reduzierte Feldstärke am Anfang des Entladungsraumes bestimmt. Der Feldverlauf zeigt eine lineare Abhängigkeit vom Laufwinkel mit einer Unstetigkeitsstelle an der Trennungsebene zwischen beiden Kamern. Weiters wird gezeigt, daß für das charakteristische Wechselstromverhalten des Systems der numerische Wert des Verhältnisses aus Feldstärke und Geschwindigkeit maßgebend ist. Aus der Untersuchung der Wechselstromeigenschaften ergibt sich eine Theorie des Steuerungsvorganges und damit eine Definition der Steuerungsarten. Es ergeben sich zwei Arten, die „lineare“ und die „logarithmische oder feldmäßige“ Geschwindigkeitssteuerung. Sie unterscheiden sich dadurch, daß die erste ihre größte Wirkung bei einem Laufwinkel  $\pi$  hat, während die zweite mit wachsendem Laufwinkel monoton zunimmt. Im besonderen wird in diesem Kapitel hergeleitet, daß die Elektronenstrecke als ein Zweipol aufgefaßt werden kann, dessen Wirk- und Blindanteil eine Funktion des Laufwinkels ist. So ergibt sich, daß bei einem Lauf-

winkel in der Umgebung von  $\frac{5\pi}{2}$  der Wirkwiderstand des Zweipoles negativ wird, wodurch die Möglichkeit zur Schwingungsanfachung gegeben ist. Es werden von allen Systemen, die einen Laufwinkel von  $\frac{5\pi}{2}$  ergeben, diejenigen ermittelt, welche dieselbe Verlustleistung aufnehmen, dabei aber den größten Wert des Anfachungswiderstandes erreichen.

Das zweite Kapitel behandelt die linearen Laufzeitercheinungen in Zweikreis-Zweikammer-systemen, das sind solche, bei denen beide Hochfrequenzkammern zu Schwingungskreisen ausgebildet sind. Der Arbeitspunkt in einem solchen System wird durch drei Laufwinkel und zwei Feldgrößen bzw. Geschwindigkeiten festgelegt. Der Feldverlauf zeigt im stationären Zustand eine lineare Abhängigkeit vom Laufwinkel mit Unstetigkeitsstellen an den Trennungswänden zwischen je zwei Kammern. Das Wechselstromverhalten wird auch in diesem Fall durch das Verhältnis Feldstärke zu Geschwindigkeit charakterisiert. So wird gezeigt, daß es für derartige Systeme vier verschiedene Betriebszustände gibt, von denen der eine der Triode entspricht, während sich aus einem anderen durch Spiegelung die Bremsfeldröhre ableiten läßt. Weiters werden die Elemente des dem System entsprechenden linearen Vierpoles abgeleitet. Außerdem wird gezeigt, daß ein symmetrisches System, welches mit voller Spannung rückgekoppelt ist, an Stelle des ursprünglichen Vierpoles einen Zweipol ergibt, der in bestimmten Laufwinkelbereichen einen negativen Eingangsleitwert annimmt und daher bei geeigneter Belastung zur Selbsterregung kommen kann. Aus einem solchen System läßt sich durch Spiegelung die Bremsfeldröhre ableiten. Die für die Bremsfeldröhre gefolgerten Schwingbereiche weichen stark von den Ergebnissen der bisherigen Theorien ab. Zwanglos wird hingegen die Tatsache erklärt, daß sich mit der Bremsfeldröhre auch Schwingungen mit erheblich größerer Wellenlänge erregen lassen.

Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit der Arbeitsweise von Zweikreis-Dreikammersystemen, das sind solche, bei denen die beiden Hochfrequenzkammern durch eine zwischenliegende Laufkammer getrennt sind. Es wird gezeigt, daß ein solches System einen linearen Vierpol darstellt, dessen Fundamentalwiderstände dieselben Werte haben wie bei den Zweikammersystemen. Weiters wird gezeigt, daß der Heilsche Generator ein symmetrisches System ist, dessen Arbeitsspannung in voller Höhe auf den Steuerkreis rückgekoppelt ist. Wird auch dem Laufraum von außen Wechselstrom zugeführt, so entsteht aus dem ursprünglichen Zweikreis-Dreikammer-system ein Dreikreis-Dreikammersystem, welches als ein linearer Sechspol aufgefaßt werden kann. Als Anwendungsbeispiel einer solchen Anordnung wird die Schirmgitterröhre untersucht.

Mit den Zweikreis-Vierkammersystemen beschäftigt sich das vierte Kapitel. Es wird gezeigt, daß sich aus einem symmetrischen System dieser Art die Reflexionsröhre ableiten läßt. Dabei wird gezeigt, daß deren starke Anfachungstendenz durch die großen Werte des Beschleunigungssprunges an der Reflexionsstelle zu erklären ist. Aus der Theorie der in diesem Kapitel behandelten Systeme werden die beim Heilschen Generator gemachten Beobachtungen über die Aufeinanderfolge von Schwingbereichen erklärt.

Während die Ergebnisse des ersten Teiles unter der Annahme abgeleitet wurden, daß die Elektronen die Kathode mit der Geschwindigkeit Null verlassen und die Feldstärke an der Kathode ebenfalls Null ist, wird im ersten Kapitel des zweiten Teiles dieses Werkes „Kathodeneigenschaften, Vierpole“ der Raumladungszustand einer ebenen Elektronenströmung untersucht, wobei die Annahme gemacht wird, daß die Elektronen die Kathode mit einer von Null verschiedenen, aber homogenen Geschwindigkeit verlassen. Aus dieser Annahme wird das Raumladungsgesetz einer idealen Kathode abgeleitet. Um die Abweichungen des Stromwertes vom idealen Raumladungsgesetz für jene Kathoden festzulegen, welche die volle Aktivität nicht erreichen, wird die „Güte“ der Kathode eingeführt. Sie ist definiert als das Verhältnis der Feldstärke an der Kathode zur Feldstärke der idealen Kathode. Das Raumladungsgebiet wird durch diese Festsetzung von den Gütewerten Eins und Null begrenzt.

Im zweiten Kapitel wird gezeigt, daß ein über die Kathode geführter Wechselstrom auch im Raumladungsgebiet in einen Konvektions- und einen Verschiebungsanteil zerfällt. Bei hohen und höchsten Frequenzen verringert sich der Konvektionsanteil immer mehr zugunsten des Verschiebungsanteiles. Es wird weiters gezeigt, daß der als Verschiebungsstrom transportierte Anteil des Gesamtwechselstromes auf eine korrigierte Formel für den Wechselstromwiderstand führt. Das Sättigungsmaß der Kathode wirkt sich dabei so aus, als ob der Elektronenstrecke ein Blindwiderstand vorgeschaltet wäre.

Der Schroteffekt wird im dritten Kapitel unter der Annahme behandelt, daß die Elektronen die Kathode mit einer einheitlichen Geschwindigkeit verlassen. Es wird eine allgemeine Formel für die infolge der spontanen Schwankungen des Emissionsstromes in einer Diode entstehende Leerlaufspannung abgeleitet. Die Größe der in dieser Formel enthaltenen unbekannten Konstanten wird aus Untersuchungen von W. Schottky hergeleitet.

Der Zusammenhang zwischen Schrot- und Funkeleffekt wird im vierten Kapitel behandelt und es wird gezeigt, daß der Funkeleffekt keine physikalische Selbständigkeit besitzt, sondern auf den Schroteffekt zurückzuführen ist.

Das fünfte Kapitel stellt eine Formelsammlung der Geschwindigkeitsfunktionen, der Widerstandsfunktion und der Laufwinkelfunktionen dar.

Im letzten Kapitel wird in vorbildlicher Weise die Vierpoltheorie der Elektronenröhre dargestellt. Als Anwendung derselben wird die Triode in Gitter-Basischaltung und in Kathoden-Basischaltung behandelt.

Als einziger Nachteil für die unbedingt zu wünschende weitgehende Verbreitung dieses wertvollen Werkes könnte die allzu knappe Behandlung des Grundproblems der allgemeinen Lösung der ebenen Elektronenströmung angesehen werden, die aber ihre Begründung darin hat, daß der Verfasser die Absicht hatte, diese Abhandlungen getrennt in Fachzeitschriften zu veröffentlichen.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die neuartige Behandlung der in diesem Werk dargestellten Probleme der Laufzeitercheinungen in Elektronenröhren diese Veröffentlichung zu einer bedeutungsvollen Neuerscheinung auf dem Gebiete der Hochfrequenzliteratur machen. Zufolge seiner grundlegenden Bedeutung kann es dem an der Weiterentwicklung der Hochfrequenztechnik arbeitenden Wissenschaftler und Ingenieur bestens empfohlen werden.

F. Kracmar, Wien.

**Kälte und Wärme in Erde und Luft.** Ausnützung für technische und landwirtschaftliche Zwecke in allen Klimaten der Erde. Von L. Motzko. Mit 105 Textabb., IV, 170 S. Wien: Manzsche Verlagsbuchhandlung. 1948. S 45.—.

Der Autor unternimmt den interessanten Versuch, auf Grund eines reichhaltigen statistischen Materials einen Vorschlag zur Ausnützung der in der Erde und in der Luft enthaltenen Kälte und Wärme bekanntzugeben, der zur Klimatisierung von Wohngebäuden, Siedlungshäusern, zur Bewetterung von Gruben, zur Entnebelung von Straßenzügen und zur Förderung des Pflanzenwuchses in der Landwirtschaft praktische Verwendung erhalten soll.

Der Vorschlag besteht darin, durch Anlage von Rohrleitungen, Stollen und Luftkammern untertags Heiz- bzw. Kühlflächen zu schaffen, wobei die umgebenden Erdmassen als Speicherkörper dienen sollen. Durch entsprechend angebrachte Isolierungen soll ein Wärmeverlust vermieden werden. Durch Auffangen des sich bei Abkühlungen unter dem Taupunkt abscheidenden Kondenswassers soll ferner bei regenarmen Gegenden eine Wasserversorgung eingeleitet werden.

Zur Bewegung der Luftmassen dient der natürliche Auftrieb oder künstliche Ventilation.

Aus der Differenz der spezifischen Wärmeln von Erde und Luft ergeben sich große umzuwälzende Luftmengen. Die Wirtschaftlichkeit einer solchen Anlage wird daher eine genaue Ermittlung der Gestehungskosten voraussetzen, so daß es unter Umständen zu überlegen wäre, durch Einschaltung einer Wärmepumpe höhere Temperaturdifferenzen und damit eine Verringerung der Heiz- oder Kühlflächen anzustreben.

Zur Stützung seiner Ausführungen führt der Verfasser eine Reihe von meteorologischen Angaben an, die die Veröffentlichung mit wichtigen Unterlagen für eine rechnerische Untersuchung der Probleme ausstatten. Hier wäre es vielleicht in einer nächsten Auflage angezeigt, wenn die theoretischen Grundlagen, insbesondere für den Wärmeaustausch auf Grund der neuen Versuchsergebnisse (Einfluß der verschiedenen Faktoren zur Bemessung der Flächen sowie der Zeitkonstanten) eingefügt werden würden. Auch die Bekanntgabe von wissenschaftlichen Versuchsergebnissen würden für die praktische Einführung der Vorschläge von Wert sein.

Der vom Verfasser angedeutete Weg der Gewinnung von Umweltwärme ist zweifellos noch viel zu wenig beachtet. In Verbindung mit der mit einem Medium arbeitenden Wärmepumpe oder der Luftwärmepumpe wird das aufgeworfene Problem besonders für die kohlenarmen Länder, die ein auf hydraulischer Grundlage aufgebautes Energiesystem haben, sehr bald große Bedeutung gewinnen, so daß der Arbeit des Verfassers weitgehende Verbreitung zu wünschen ist. Denn alle mit obigen Problemen sich beschäftigenden Forscher werden die übersichtliche Zusammenstellung wichtiger Einzelgrößen nur begrüßen, da sie eine gute Unterlage für weitere Untersuchungen bilden.

Druck und Ausstattung des Buches ist in der bei dem genannten Verlag gewohnten Weise vorzüglich.

H. Melan, Wien.

## Berichtigung.

Österreichisches Ingenieur-Archiv, Band II, Heft 3, S. 201, Arbeit F. Cap, Zum zweidimensionalen Feldproblem zweier leitenden Ebenen in beliebiger Lage.

Herr Dr. Berger vom mathematischen Institut der Technischen Hochschule Wien besaß die Freundlichkeit, mich auf ein Versehen in meiner Arbeit: „Zum zweidimensionalen Feldproblem zweier leitenden Ebenen in beliebiger Lage“ aufmerksam zu machen. Da die Linie  $ad$  (Abb. 7) eine über den unendlichfernen Punkt laufende Kraftlinie ist, muß auch  $AD$  (Abb. 4) Kraftlinie sein. Sie muß daher von  $A$  zum unendlich fernen Punkt und von dort nach  $D$  geführt werden. Das Integral (1) ändert sich hierdurch etwas; seine endgültige Gestalt hängt von den Größen  $\psi_1$  und  $\psi_2$  ab. Der durchgerechnete Spezialfall wird durch dieses Versehen nicht berührt.

Der Ausdruck „Plattenbreite“ für die Strecke  $AB$  (Abb. 4) ist natürlich nurfigürlich gemeint; die Plattenbreite ist ja  $ab$ ; die Punkte  $A$  und  $D$  ( $\psi_1$  und  $\psi_2$ ) geben die Plattenladung und damit bei gegebenem Potential die Kapazität (Lage und Breite) an. Für die praktische Brauchbarkeit der Innenraumlösung (Abschn. IV) muß als „Abschirmkriterium“  $|r_1 - r_2| \ll \frac{b_1 + b_2}{2}$  und  $b_1 = f \cdot b_2$ , wo  $0,4 < f < 2,5$ , verlangt werden.

Die Abb. 8 und 9 sind vertauscht.

Dr. Cap.

## Autorenverzeichnis.

- Beer, H., Untersuchung des seitlichen Ausweichens von Stabwerken mit elastisch gestütztem Mittelknoten. S. 265.
- Berger, E. R., Ergänzungen zur Experimentalphysik. Von H. Greinacher. Zweite Auflage. (Buchbesprechung.) S. 319.
- Borowicka, H., Die Druckausbreitung in einer Halbscheibe bei mit der Tiefe abnehmendem Elastizitätsmodul. S. 360.
- Cap, F., Zum zweidimensionalen Feldproblem zweier leitender Ebenen in beliebiger Lage. S. 201.
- Castelliz, H., Die Eigenschaften der Hochfrequenzübertragung zwischen Innen- und Außenleiter koaxialer Rohrsysteme. S. 275.
- Chwala, A., Einführung in die Technische Chemie. Von K. W. Geisler. Dritte Auflage. (Buchbesprechung.) S. 319.
- Federhofer, K., Berechnung der Grundschwingzahl der gleichmäßig belasteten dünnen Kreisplatte mit großer Ausbiegung. S. 325.
- , Mechanik. Von E. Meißner † und H. Ziegler. I. und II. Band. (Buchbesprechung.) S. 321.
- , Vorlesungen über Baustatik. Von F. Stüssi. I. Band. (Buchbesprechung.) S. 322.
- Flamm, L., Natur und Erkenntnis. Von A. March. (Buchbesprechung.) S. 320.
- Franke, O., Über ein Extremalprinzip der elektromagnetischen Felder. S. 89.
- Girkmann, K., Die Beanspruchung einer Druckschachtpanzierung bei unvollständiger Umschließung. S. 211.
- , Der Brückenbau. Herausgegeben von E. Melan. 3. Band: Stahlbrücken. Von F. Hartmann †. I. Teillieferung. (Buchbesprechung.) S. 167.
- Hlawka, E., Allgemeine Methodenlehre der Statistik. Von F. Klezl-Norberg. Zweite Auflage. (Buchbesprechung.) S. 86.
- Hofer, R., Doppelvierpol als regelbares Transformationsglied. S. 169.
- Inzinger, R., Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung. Von A. Duschek und A. Hochrainer. I. Teil (Buchbesprechung.) S. 87.
- Jung, F., Lehrbuch der Technischen Mechanik starrer Systeme. Von K. Wolf. Zweite Auflage. (Buchbesprechung.) S. 323.
- Kämmerer, C., Zur Berechnung der Verdampfungswärmen aus der Zustandsgleichung. S. 93.
- , Die Verbrennungskraftmaschine. Herausgegeben von H. List. 9. Band: Die Steuerung der Verbrennungskraftmaschinen. Von A. Pischinger. (Buchbesprechung.) S. 322.
- Kastner, H., Betrachtungen zur Mohrschen Theorie der Bruchgefahr. S. 298.
- Kirste, L., Eine Erweiterung der Steifigkeitsmethode. S. 226.
- Kneißler, L., Allgemeine Hochfrequenztechnik. Von F. Kraemar. I. Teil. (Buchbesprechung.) S. 264.
- Koch, K. M., Ein neues Bild des metallischen Leitungsmechanismus. S. 363.
- Korst, H., Die Temperaturverteilung im Ziehgut beim Drahtziehen. S. 132.
- , Hydraulic Measurement. Von H. Addison. Zweite Auflage. (Buchbesprechung.) S. 88.
- , Gasturbinenkraftwerke. Von L. Musil. (Buchbesprechung.) S. 262.
- Kraemar, F., Das Turbulenzproblem. (II. Ausgebildete Turbulenz.) (Bericht.) S. 152.
- , Die philosophischen Grundlagen der wissenschaftlichen Erkenntnis. Von A. Fischer. (Buchbesprechung.) S. 168.
- , Laufzeittheorie der Elektronenröhren. Von H. W. König. I. und II. Teil. (Buchbesprechung.) S. 377.
- Krames, J., Untersuchungen über „gefährliche Flächen“ und „gefährliche Räume“ mittels des Aeroprojektors „Multiplex“. S. 123.
- , Zur Erinnerung an Emil Müller. (Persönliches.) S. 317.
- Kraus, G., Über lineare elektrische Übertragungssysteme. S. 286.
- Kunz, B. F. J., Die Bestimmung des vertikalen Schweregradienten. S. 1.
- Ledinegg, M., Der Mechanismus der Turbulenz. S. 244.
- Litschauer, J., Koordinatenumformungen mit der Doppelrechenmaschine. S. 18.
- Magyar, F., Ausgewählte Kapitel aus der Physik. Von K. W. F. Kohlrausch. I. und II. Teil. (Buchbesprechung.) S. 319.
- , III. Teil. (Buchbesprechung.) S. 376.
- , IV. Teil. (Buchbesprechung.) S. 376.
- , Mathematik, Logik und Erfahrung. Von V. Kraft. (Buchbesprechung.) S. 319.

- Magyar, F., 100 Übungen aus der Mechanik. Von E. Pawelka. (Buchbesprechung.) S. 324.
- Melan, H., Kälte und Wärme in Erde und Luft. Von L. Motzko. (Buchbesprechung.) S. 379.
- Müller, K. J., Die Festigkeit rein radial beschaufelter Kreiselverdichter-Laufräder. S. 138.
- , Die Temperaturverteilung in den Laufrädern von Turbomaschinen. S. 177.
- Müller-Magyary, F., Kritische Spannungen dünnwandiger Plattenwerke unter zentrischem Druck. S. 331.
- Neth, A., Neues Verfahren zur Präzisions-Gitterkonstantenbestimmung. S. 106.
- Oberdorfer, G., Die kissoidale Erzeugung der zirkularen Kubik und bizirkularen Quartik aus der komplexen Ortskurvendarstellung. S. 309.
- Parkus, H., Der wandartige Träger auf drei Stützen. S. 185.
- , Die Torsion geschlitzter Hohlwellen. S. 372.
- Pongratz, F., Die neue Theorie des Stahlbetons auf Grund der Bildsamkeit im Bruchzustand. Von R. Saliger. Zweite Auflage. (Buchbesprechung.) S. 263.
- , Praktische Statik. Von R. Saliger. Fünfte Auflage. (Buchbesprechung.) S. 322.
- Pröll, A., Ovale Strebenprofile in schiefer Anströmung. S. 77.
- Regler, F., Geometrische Optik bei Röntgenrückstrahlauflnahmen. S. 229.
- Richter, L., Die strenge Lösung für rollende Reibung. Von L. Föppl. (Buchbesprechung.) S. 167.
- Schuh, H., Einige Probleme der Strömung, des Wärmeüberganges und der Diffusion bei Laminarströmung längs einer ebenen Platte. S. 346.
- Tschirf, L., Die industrielle Betriebsanalyse als Voraussetzung für Organisations-, Rationalisierungs-, Planungs- und Finanzierungsmaßnahmen. Von F. Meißner. (Buchbesprechung.) S. 86.
- Vásárhelyi, D., Ein neues Auswertungsverfahren für spannungsoptische Untersuchungen. S. 64.
- Watzlawek, H., Sphärische Aberration dünner Einzellinsen nach D. Argentieri. S. 114.
- Wolf, K., Franz Jung, Ehrendoktor der Technischen Hochschule Wien. (Persönliches.) S. 165.
- Wunderlich, W., Darstellende und kinematische Geometrie für Maschinenbauer. Von J. L. Krames. (Buchbesprechung.) S. 87.

**Natur und Erkenntnis.** Die Welt in der Konstruktion des heutigen Physikers. Von Prof. Dr. A. March, Innsbruck. Mit 18 Abbildungen. VIII, 239 Seiten. 1948. In Österreich Preis S 36.—, im Ausland sfr. 18.—

*Aus den Besprechungen:*

„Für alle, die an den umwälzenden Erkenntnissen der heutigen Naturwissenschaft, insbesondere der neuen Physik, Anteil nehmen, ist Marchs Werk das Buch, das sehnlichst erwartet wurde...“

(„Österreichische Zeitschrift für Telegraphen-, Telefon-, Funk- und Fernsehtechnik“, 2. Jg., H. 7/8)

**Acta Physica Austriaca.** Unter Mitwirkung der Österr. Akademie der Wissenschaften herausg. von K.W.F. Kohlrausch, Graz, und H. Thirring, Wien. Schriftleitung: P. Urban, Graz.

Die Zeitschrift bringt *Originalarbeiten* aus allen Gebieten der theoretischen und experimentellen Physik und *Übersichten* über die Fortschritte der physikalischen Forschung in aller Welt. Angesichts der Verzweigung und weitgehenden Spezialisierung der modernen Wissenschaften erblickt die Zeitschrift ihr Hauptziel darin, eine Gesamtschau der Physik zu vermitteln. Spezialabhandlungen sind so abgefaßt, daß sie allen Physikern und nicht nur dem Fachmann des betreffenden Wissenschaftsverzweiges verständlich sind.

*Aus dem Inhalt des ersten Bandes:*

**Die Besonderheit des Weltbildes der Naturwissenschaft.** Von Prof. E. Schrödinger, Dublin (Band I, Heft 3, ausgegeben im Februar 1948). In Österreich S 28.—, im Ausland sfr. 14.—

**Die philosophischen Grundlagen der wissenschaftlichen Erkenntnis.**

Von A. Fischer, Budapest. VI, 240 Seiten. 1947. In Österreich S 30.—, im Ausland sfr. 18.—

*Aus den Besprechungen:*

„Im gesamten stellt das Buch einen tiefgründigen Beitrag dar, »der Wissenschaft jene Stellung in unserem Wertesystem wiederzugeben, welche ihr als der höchsten Leistung der menschlichen Vernunft gebührt«, und kann daher auf das beste empfohlen werden.“ („Österr. Ingenieur-Archiv“, Bd. 2, H. 2)

„Unter Verwendung klassischer und einer reichen modernen Literatur verschafft der Verfasser eine klare Übersicht über die Lösungsversuche der Grundprobleme der Psychologie, Logik und Methodologie der wissenschaftlichen Erkenntnis und unternimmt deren Einordnung in den umfassenden Zusammenhang des modernen Weltbildes...“ („Universum“, Wien, 2. Jg., Nr. 6)

**Mathematik, Logik und Erfahrung.** Von Univ.-Prof. Dr. V. Kraft, Wien. VIII, 129 Seiten. 1947. In Österreich S 18.—, im Ausland sfr. 10.—

*Aus den Besprechungen:*

„Es kommt gar nicht darauf an, welche Stellung der Leser zu den Ansichten des Autors einnimmt. Das Buch ist sehr interessant, flüssig geschrieben und leicht zu lesen. Der Wert des Buches liegt in der Anregung solcher philosophisch wenig geschulter Leser, die in der Mathematik immerhin mehr als ein bloßes Hilfsmittel sehen wollen...“ („Österreichisches Ingenieur-Archiv“, Band 2, Heft 4)

**Monatshefte für Mathematik.** Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik. Unter Mitwirkung der österreichischen Mathematischen Gesellschaft in Wien, herausgegeben von J. Radon, Wien.

*Im August 1948 erschien:*

52. Band, 3. Heft, ausgegeben im August 1948. In Österreich S 30.—, im Ausland sfr. 13.50

Inhaltsverzeichnis: Müller, H. R., Der Drall einer Regelfläche im elliptischen Raum — Emch, A., Neue durch stereographische Projektion erhaltenen Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung mit Nabelpunkten — Bompiani, E., Monoidi del  $3^{\text{rd}}$  ordine per una calotta superficiale del  $4^{\text{th}}$  ordine — Funk, P., Beiträge zur zweidimensionalen Finslerschen Geometrie — Mayrhofer, K., Über vollständige Maße — Antosiewicz, H., Über die Anwendungen des Vektoralkals auf die Geometrie algebraischer Kurven — Hlawka, E., Eine asymptotische Formel für Potenzsummen komplexer Linearformen — Prachar, K., Zur Geometrie der Reihen — Buchbesprechungen.

Soeben erschienen:

## Flächentragwerke

Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten, Schalen und Faltwerke

Von

**Dr. techn. Dipl.-Ing. Karl Girkmann**

ord. Professor an der Technischen Hochschule in Wien

Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage

Mit 272 Textabbildungen. XVI, 502 Seiten. 8°. 1948

In Österreich S 132.—, geb. S 138.—; im Ausland sfr. 66.—, geb. sfr. 70.—

Die erste 1946 erschienene Auflage des Buches hat eine überaus günstige Aufnahme gefunden, so daß sie bald vergriffen war. Es bestand sonach kein Anlaß, an dem bewährten Aufbau und an der Darstellung eine Änderung vorzunehmen. Zu den fünf Abschnitten: Allgemeine Grundlagen der mathematischen Theorie der Elastizität — Die Scheiben — Die Platten — Die Schalen — Die Faltwerke — ist lediglich ein Anhang hinzugekommen, der den orthotropen Platten und deren Anwendungen gewidmet ist, wodurch der Inhalt des Buches wesentlich erweitert worden ist

## Lehrbuch der darstellenden Geometrie

Von

**Dr. Emil Müller +**

weiland o. ö. Professor an der Technischen Hochschule  
in Wien

**Dr. Erwin Kruppa**

o. ö. Professor an der Technischen Hochschule  
in Wien

Fünfte, ergänzte Auflage

Mit 375 Textabbildungen. IX, 404 Seiten. 1948

In Österreich S 60.—; im Ausland sfr. 26.—

Die neue, ergänzte fünfte Auflage des Lehrbuches unterscheidet sich aber von der vierten Auflage durch einige Ergänzungen. Der in der vierten Auflage in Nr. 124 behandelte Stoff wurde zu einem abgerundeten Kapitel: „Geometrische Grundbegriffe der Photogrammetrie“ ausgestaltet. Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie sind in der Hauptsache ein Bestandteil der darstellenden Geometrie. Das neue Kapitel ist als eine Vorschulung zum eingehenden Studium der Photogrammetrie gedacht. — Ein Anhang enthält *Ergänzungen zur Axonometrie: I. Konstruktion eines Schrägrisses mittels des Einschneideverfahrens* von L. Eckhart, das dem technischen Zeichnen besonders gut entspricht, und *II. Zur Konstruktion des normalaxonometrischen Dreibeins für die Verkürzungsverhältnisse 1 : 1/2 : 1*, eine Konstruktion, die die Angaben des Normblattes DIN 5 durch eine einfache und einfach zu merkende Konstruktion ersetzt

---

Zu beziehen durch jede Buchhandlung